Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2

Prof. Marcelo Mendes

Aula 2

Equações e Sistemas de Equações

Neste 2^o texto de Álgebra, veremos diversos exemplos de equações e sistemas de equações em nível de problemas olímpicos do ensino fundamental.

Eles, possivelmente, servirão posteriormente de ideia para problemas mais difíceis.

1 Equações

Nossos três primeiros exemplos são de equações em que as soluções utilizam *produtos notáveis*, como aplicação do último assunto.

Problema 1. (EUA) Determine o número de soluções inteiras da equação $2^{2x} - 3^{2y} = 55$.

Solução. Inicialmente, observe que o lado esquerdo da equação é a diferença dos quadrados de 2^x e 3^y e, portanto, $(2^x + 3^y)(2^x - 3^y) = 55$. Veja que x e y são positivos (prove isso!), além de $(2^x + 3^y)$ e $(2^x - 3^y)$. Assim, as únicas possibilidades são

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2^x + 3^y & = & 55 \\ 2^x - 3^y & = & 1 \end{array}\right. \text{ e } \left\{\begin{array}{rcl} 2^x + 3^y & = & 11 \\ 2^x - 3^y & = & 5 \end{array}\right. .$$

Apenas o segundo sistema possui solução, que é $(x, y) = (3, 1)$.

Problema 2. Quantas soluções inteiras possui a equação $x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x - 20y = 29$?

Solução. Os dois primeiros termos do lado esquerdo dão a pista do começo pois lembram o quadrado de $x - 2y$. Assim, vamos reescrever a equação da seguinte forma

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y + 1 + 2y^2 - 24y + 72 = 102$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 - 2(x - 2y) + 1 + 2(y^2 - 12y + 36) = 102$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y - 1)^2 + 2(y - 6)^2 = 102.$$

Assim, $x-2y-1$ é par e não maior que 10. Testanto $x-2y-1=0,\pm2,\pm4,\pm6,\pm8,\ \pm10$, obtemos $(y-6)^2=51,49,43,33,19,1$. Logo, as únicas soluções vêm de $x-2y-1=\pm2$ e $y-6=\pm7$ ou $x-2y-1=\pm10$ e $y-6=\pm1$. As soluções, portanto, são

$$(29,13);(25,13);(1,-1);(-3,-1);(25,7);(5,7);(21,5);(1,5).$$

Problema 3. (Romênia/2006) Encontre todos os números reais a e b satisfazendo

$$2(a^2+1)(b^2+1)=(a+1)(b+1)(ab+1).$$

Solução. Utilizando produtos notáveis, a equação dada fica equivalente a

$$\begin{aligned}
&2\left(a^2b^2+a^2+b^2+1\right)=(ab+a+b+1)\,(ab+1)\\
\Leftrightarrow\ &2a^2b^2+2a^2+2b^2+2=a^2b^2+a^2b+ab^2++2ab+a+b+1\\
\Leftrightarrow\ &a^2\left(b^2-b+2\right)-a\left(b^2+2b+1\right)+2b^2-b+1=0,
\end{aligned}$$

que pode ser considerada uma equação do 2^o grau em a cujo discriminante (Δ) é

$$\begin{aligned}
\Delta&=(b+1)^4-4\left(b^2-b+2\right)\left(2b^2-b+1\right)\\
&=-7b^4+16b^3-18b^2+16b-7.
\end{aligned}$$

Esse polinômio possui duas características interessantes. A primeira, que nós não utilizaremos, é que ele é um polinômio recíproco de 4^o grau e de 1^a espécie, pois a leitura de seus coeficientes da esquerda para direita coincide com a leitura feita da direita para a esquerda. A segunda é que $b=1$ é uma raiz já que o valor 1 zera o Δ. Isso nos leva a escrever

$$\begin{aligned}
\Delta&=-7b^4+7b^3+9b^3-9b^2-9b^2+9b+7b-7\\
&=(b-1)\left(-7b^3+9b^2-9b+7\right).
\end{aligned}$$

Novamente, o segundo fator desse último produto é um polinômio recíproco de 3^o grau, mas de 2^a espécie, já que as leituras dos coeficientes nos dois sentidos são simétricas. Além disso, $b=1$ é novamente uma raiz e, escrevendo $-7b^3+9b^2-9b+7=(b-1)\left(-7b^2+2b-7\right)$, obtemos

$$\Delta=(b-1)^2\left(-7b^2+2b-7\right).$$

O discriminante de $-7b^2+2b-7$ é negativo e, portanto, $-7b^2+2b-7<0,\forall b$. Como $(b-1)^2\geq0,\forall b$, segue que $\Delta\leq0,\forall b$. Para $a\in\mathbb{R}$, devemos ter $\Delta=0$ e, portanto, $b=1$ e $a=1$, que é a única solução.

Problema 4. (Croácia) Encontre todas as soluções inteiras da equação

$$4x+y+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}+48=0.$$

Problema 5. Mostre que $x^2-y^2=a^3$ sempre tem solução inteira (x,y), dado que $a\in\mathbb{Z}$.

Problema 6. Prove que se os coeficientes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c$ são inteiros ímpares, então as raízes da equação não podem ser números racionais.

Problema 7. Se x e y são reais tais que $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$, prove que $x + y = 0$.

Problema 8. Para quais números reais a, b, c $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a + b + c \neq 0)$ vale a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

Problema 9. Sejam a, b, c, d inteiros distintos tais que a equação

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - 4 = 0$$

possui uma raiz inteira r. Mostre que $4r = a + b + c + d$.

Problema 10. (EUA) Se $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$, determine o valor de $\frac{2}{x}$.

Problema 11. (EUA) Se $ab \neq 0$ e $|a| \neq |b|$, quantos valores distintos de x satisfazem a equação $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$?

2 Sistemas de equações

Vamos iniciar com um problema da 1^a fase do nível 2 da XXI OBM.

Problema 12. (OBM) Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Determine a soma em anos das idades dos três.

Solução. Sejam a, o, e as idades de Rafael, Roberto e Reinaldo, respectivamente. Assim, $a = \frac{2}{3}o$, $a = e - 2$ e $o = \frac{4}{3}e$. Daí, $a = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}e = e - 2$, o que dá $e = 18$. Portanto, $a = 16$, $o = 24$ e $a + o + e = 58$.

Problema 13. (EUA - Adaptado) Determine todas as triplas ordenadas distintas (x, y, z) de números inteiros satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ xy + 4yz + 2zx = 22 \\ xyz = 6 \end{cases}.$$

Solução. Podemos reescrever o sistema como $\begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ x \cdot 2y + 2y \cdot 4z + x \cdot 4z = 44 \\ 2y \cdot 4z = 48 \end{cases}$.

Fazendo $x = x', 2y = y'$ e $4z = z'$, chegamos a

$$\begin{cases} x' + y' + z' = 12 \\ x'y' + y'z' + x'z' = 44 \\ x'y'z' = 48 \end{cases}.$$

Assim, x', y', z' são raízes da equação $t^3 - 12t^2 + 44t - 48 = 0$ (verifique!), que possui 2 como raiz. Daí, podemos reescrevê-la como

$$t^3 - 2t^2 - 10t^2 + 20t + 24t - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^2 - 10t + 24\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t-4)(t-6) = 0,$$

que gera as soluções $2, 4, 6$. Assim, $4z = 4$ e $z = 1$. Além disso, $x = 2$ e $y = 3$ ou $x = 6$ e $y = 1$.

Problema 14. (URSS) Encontre todas as soluções inteiras (x, y, z, t) do sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}.$$

Solução. Nas duas equações, aparecem as 4 letras exatamente uma vez. Assim, podemos elevá-las ao quadrado e somar o resultado da primeira com o dobro do da segunda, eliminando o produto $xyzt$

$$(xz)^2 + 2(xt)^2 + 4(yt)^2 + 2(yz)^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(z^2 + 2t^2\right) + 2y^2\left(z^2 + 2t^2\right) = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2y^2\right)\left(z^2 + 2t^2\right) = 11.$$

Temos as seguintes possibilidade $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z^2 + 2t^2 = 11 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11 \\ z^2 + 2t^2 = 1 \end{cases}$.

No primeiro, temos $x^2 = 1, y^2 = 0$ e $z^2 = 9, t^2 = 1$. No segundo, $x^2 = 9, y^2 = 1$ e $z^2 = 1, t^2 = 0$. Substituindo nas equações iniciais, obtemos as soluções $(x, y, z, t) = (1, 0, 3, 1), (-1, 0, -3, -1), (3, 1, 1, 0), (-3, -1, -1, 0)$.

Problema 15. (Bielorrússia) Determine todas as soluções reais do sistema $(n \geq 2)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = \frac{1}{x_n} \\ x_2 + x_3 + ... + x_n = \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ x_n + x_1 + ... + x_{n-2} = \frac{1}{x_{n-1}} \end{cases}.$$

Solução. Inicialmente, observe que $x_1 + x_2 + ... + x_n = x_k + \frac{1}{x_k} (*), \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ e que todos os x_k são não-nulos. Tomando duas equações quaisquer, obtemos $x_i + \frac{1}{x_i} = x_j + \frac{1}{x_j}$, cujas soluções são $x_i = x_j$ ou $x_i = \frac{1}{x_j}$.

Supondo a segunda possibilidade e substituindo na equação do sistema original em que o lado direito é $\frac{1}{x_j}$, chegamos a $x_1 + ... + \hat{x}_i + ... + \hat{x}_j + ... + x_n = 0$ (a notação $\hat{x}_i$ significa que x_i foi suprimido da soma), o que é impossível já que (*) garante que os x_k são todos positivos ou todos negativos.

Assim, só nos resta a opção em que todos os x_k são iguais, digamos a α. Substituindo em qualquer uma das equações, obtemos $(n-1)\alpha = \frac{1}{\alpha}$, ou seja, $x_k = \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \forall k$ ou $x_k = -\frac{1}{\sqrt{n-1}}, \forall k$.

Problema 16. Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 2 \\ x - 3y^2 + z = 0 \end{cases}.$$

Problema 17. (IMTS) O conjunto S é formado por 5 inteiros. Se os elementos de S são somados aos pares, obtemos $1967, 1972, 1973, 1974, 1975, 1980, 1983, 1984, 1989, 1991$. Quais são os elementos de S?

Problema 18. (EUA) Resolva o sitema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96 \end{cases}.$$

Problema 19. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y \\ y + \frac{1}{y} = z \\ z + \frac{1}{z} = x \end{cases}$$

não possui soluções reais (x, y, z).

Problema 20. Mostre que a única solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \vdots = \vdots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

é $x_1 = x_2 = ... = x_{99} = x_{100} = 0$.

Problema 21. (EUA) Quatro inteiros positivos a, b, c, d têm produto igual a 8! e satisfazem

$$\begin{cases} ab + a + b = 524 \\ bc + b + c = 146 \\ cd + c + d = 104 \end{cases}$$

Quanto vale $a - d$?

Problema 22. (EUA) Quantas triplas ordenadas (x, y, z) de inteiros satisfazem o sistema de equações abaixo?

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 = 31 \\ -x^2 + 6yz + 2z^2 = 44 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{cases}$$

Problema 23. (Iberoamericana) Ache todas a triplas de números reais (x, y, z) tais que

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases}$$

Problema 24. (Romênia) Os números reais não nulos x, y, z, t verificam as seguintes equações

$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1000^3 \end{cases}$$

Determine o valor da soma $x + y + z + t$.

Problema 25. (OCM) Determine $a + b + c + d$, se

$$\begin{cases} 6a + 2b = 3840 \\ 6c + 3d = 4410 \\ a + 3b + 2d = 3080 \end{cases}.$$

Problema 26. (OBM/IME) Sejam a, b, c e k números reais diferentes de zero satisfazendo as relações $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Qual é o número de possíveis valores que k pode assumir?

Problema 27. (OBM) Determine o número de soluções inteiras e positivas do sistema

$$\begin{cases} a + b = c^2 \\ a + b + c = 30 \end{cases}$$

Problema 28. (OBM) As letras O, B, M representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?

Problema 29. (OBM) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a(b+c) = 152$, $b(c+a) = 162$ e $c(a+b) = 170$. Determine o valor de abc.

Problema 30. (OBM) Quantos pares ordenados (x, y) de números reais satisfazem a equação $\left(x - y^2\right)^2 + (x - y - 2)^2 = 0$.

Problema 31. (OBM) Os inteiros $0 < x < y < z < w < t$ são tais que $w = z(x + y)$ e $t = w(y + z)$. Sendo $w = 9$, determine o valor de t.

Problema 32. (EUA) Se x e y são números reais não-nulos tais que $x = 1 + \dfrac{1}{y}$ e $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, então y é igual a:

a) $x - 1$

b) $1 - x$

c) $1 + x$

d) $-x$

e) x

Dicas

4. Fatore o lado esquerdo da equação. Comece escrevendo a soma dos 3 primeiros termos como o quadrado da soma de dois termos.

5. Observe que o problema não pede **todas** as soluções dessa equação. Assim, fatore o lado esquerdo e faça $x + y = a^2$ e $x - y = a$.

6. Use a definição: se $x \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ tais que $x = \frac{p}{q}$. Se for necessário, acrescente que x e y são primos entre si. Com essa última observação, as paridades de p e q só não podem ser ambas pares. Utilize o fato de que 0 é par para chegar a contradições em todos os casos.

7. Passe o primeiro fator para o lado direito e racionalize (ou então, racionalize mesmo na equação inicial). Depois, faça o mesmo com o segundo fator.

8. Para 'equilibrar' a equação, passe $\frac{1}{c}$ para o lado direito. Em seguida, reduza a um denominador comum em cada lado. Analise, em seguida, as possibilidades de os números serem ou não iguais a 0.

9. Use a definição: se r é raiz da equação em x, então substituindo x pelo valor r a equação fica verdadeira. Depois, escreva 4 como produto de 4 números inteiros distintos.

16. Combine as equações 1 e 3.

18. Some todas as equações, que nos dará a soma de todas os $x_i s$. Depois, subtraia cada uma desse resultado.

19. Some todas as equações.

20. Subtraia as equações aos pares.

21. Some 1 a cada membro de cada equação e use a fatoração $xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$.

22. Some todas as equações e perceba soma de quadrados.

23. Subtraia as equações aos pares.

24. Veja o problema 8.

26. Escreva $a = k(b + c), b = k(c + a), c = k(a + b)$ e some todas as equações em seguida.

28. Multiplique a segunda equação por M e a terceira por O.

29. Some todas as equações.

30. Se a soma dos quadrados de dois números reais é 0, então os dois números são iguais a 0.

Respostas

4. $(0,36),(1,16),(4,4),(9,0),(0,64),(1,36),(4,16),(9,4),(16,0)$
8. $a=-b$ ou $b=-c$ ou $c=-a$
9. 1
10. 3
16. $(2,-1,1),\left(\frac{19}{12},\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$
17. $S=\{983,984,989,991,1000\}$
18. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-25,-19,-7,17,65)$
21. 10
22. 0
23. $(-1,-1,-1),(1,-1,1)$
24. 2000
25. 1985
26. $2\left(\frac{1}{2};-1\right)$
27. 24
28. 20
29. 720
30. 2
31. 45
32. e

Algebra 02 - Equações e Sistemas de Equações

Problema 1. Encontre todos os valores de x satisfazendo a equação $\dfrac{x-\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}} = \dfrac{11}{5}$.

Solução. Multiplicando obtemos $5x - 5\sqrt{x+1} = 11x + 11\sqrt{x+1}$. Então, $-3x = 8\sqrt{x+1}$, $9x^2 = 64x + 64$, $9x^2 - 64x - 64 = 0$. Como $9x^2 - 64x - 64 = (9x+8)(x-8)$, ou $9x + 8 = 0$ ou $x - 8 = 0$. Testando, verificamos que a solução é $x = \dfrac{-8}{9}$.

Problema 2. Encontre o menor valor de x satisfazendo as condições: $x^3 + 2x^2 = a$, onde x é um inteiro positivo ímpar, e a é o quadrado de um inteiro.

Solução. $x^3+2x^2 = x^2(x+2) = n^2$, onde n é um inteiro. Então, $x+2$ deve ser um quadrado. Testanto $x = 1$, 3, 5 e 7 descobrimos que o menor valor ímpar de x para que $x + 2$ seja um quadrado é $x = 7$, para o qual $x + 2 = 3^2$.

Problema 3. Encontre as soluções inteiras da equação $x^2 - 2y^2 - xy = 7$.

Solução. Note que

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 - xy &= (x^2 - y^2) - (y^2 + xy) \\ &= (x-y)(x+y) - y(y+x) \\ &= (x+y)(x-2y). \end{aligned}$$

Então a equação é equivalente a $(x + y)(x - 2y) = 7$. Podemos ter $x + y = 1$, -1, 7 e -7. As soluções são $(x, y) = (3, -2), (5, 2), (-5, -2), (-3, 2)$.

Problema 4. Resolva a equação

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c$$

Solução. Nós temos

$$\left(\frac{x-ab}{a+b} - c\right) + \left(\frac{x-ac}{a+c} - b\right) + \left(\frac{x-bc}{b+c} - a\right) = 0.$$

Então,

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-ab-ac-bc}{a+c} + \frac{x-ab-ac-bc}{b+c} = 0$$

ou,

$$(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) = 0.$$

Assumindo que

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}$$

é diferente de zero, nós obtemos

$$x = ab + ac + bc.$$

Se, entretanto,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0,$$

então a equação dada se torna um identidade que vale para todo x.

Problema 5. Resolva a equação

$$\frac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-3b-c}=\frac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-b-3c}.$$

Solução. Se colocarmos na nossa equação $6x+2a=A$, $3b+c=B$, $2x+6a=C$, $b+3c=D$, então ela fica reescrita da seguinte maneira

$$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}.$$

Adicionando 1 aos dois lados da equação, nós encontramos

$$\frac{2A}{A-B}=\frac{2C}{C-D}.$$

Analogamente, subtraindo 1, nós temos

$$\frac{2B}{A-B}=\frac{2D}{C-D}.$$

Dividindo as duas igualdades, nós temos

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

isto é,

$$\frac{6x+2a}{3b+c}=\frac{2x+6a}{b+3c}.$$

Então

$$\left(\frac{6}{3b+c}-\frac{2}{b+3c}\right)x=\left(\frac{6}{b+3c}-\frac{2}{3b+c}\right)a.$$

Finalmente,

$$x=\frac{ab}{c}.$$

Problema 6. Resolva a sistema

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x+y+w &= b \\ x+z+w &= c \\ y+z+w &= d. \end{aligned}$$

Solução. Somando todas as equações, nós temos

$$x+y+z+w = \frac{a+b+c+d}{3}.$$

Consequentemente

$$w = (x+y+z+w) - (x+y+z) = \frac{a+b+c+d}{3} - a = \frac{b+c+d-2a}{3}.$$

Analogamente, nós obtemos

$$x = \frac{a+b+c-2d}{3},\ y = \frac{a+b+d-2c}{3},\ z = \frac{a+c+d-2b}{3}.$$

Problema 7. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x^y &= y^x \\ x^m &= y^n. \end{aligned}$$

Solução. Nós temos

$$x = y^{x/y}.$$

Consequentemente,

$$x^m = y^{\frac{mx}{y}}.$$

Usando a segunda equação, nós encontramos

$$y^{\frac{mx}{y}} = y^n.$$

Agora, ou $y = 1$ e então $x = 1$ ou $\dfrac{mx}{y} = n$, isto é,

$$x = \frac{ny}{m}.$$

Substituindo na segunda equação, nós temos:

$$\left(\frac{ny}{m}\right)^m = y^n, \quad y^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^m.$$

Dai,

$$y = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad x = y^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}.$$

Problema 8. Resolva o sistema

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$x^4 + y^4 = 17$$

Solução. Temos que

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2.$$

Então,

$$x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^{4)}2 = 4.$$

Fazendo $a = x^2$ e $b = y^2$ temos

$$a + b = 5, \quad ab = 4$$

Esse sistema nos leva a equação $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ com soluções $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$. Dessa forma, temos $(a, b) = (1, 4), (4, 1)$. Consequentemente, $(x, y) = (1, 2)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, -1)$.

Problema 9. Dado que $x^2 = y + a$ e $y^2 = x + a$, onde a é um inteiro positivo, encontre expressões para a tais que existem soluções inteiras para x e y.

Solução. $x^2 = y+a$, $y^2 = x+a$, então $x^2-y^2 = y-x$. Portanto, $(x-y)(x+y)+(x-y) = 0$, $(x - y)(x + y + 1) = 0$. Daí, $x = y$ ou $x = -1 - y$. Portanto, ou $y^2 - y - a = 0$ dando $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$, ou $y^2 + y + 1 - a = 0$ dando $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$.
Para y ser inteiro, $\sqrt{1 + 4a} = 2n + 1$ e $\sqrt{4a - 3} = 2m - 1$. Então, $a = n^2 + n = n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ou $a = m^2 - m + 1 = m(m - 1) + 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Problema 10. Resolva o sistema

$$x(x + y + x) = a^2$$
$$y(x + y + x) = b^2$$
$$z(x + y + x) = c^2.$$

Solução. Somando as três equações nós encontramos

$$(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Daí,

$$x + y + z = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Consequentemente

$$x = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$z = \frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$