POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Relações entre áreas

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. No triângulo ABC, os pontos L, M e N estão sobre BC, CA e AB respectivamente, e AL, BM e CN são concorrentes no ponto P.

(a) Encontre o valor numérico de
$$\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}.$$

(b) Encontre o valor numérico de
$$\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN}.$$

Problema 2. (Ibero) Se AD, BE e CF são três cevianas concorrentes no circuncentro O do triângulo ABC, demonstre que
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R},$$
onde R é o raio da circunferência circunscrita.

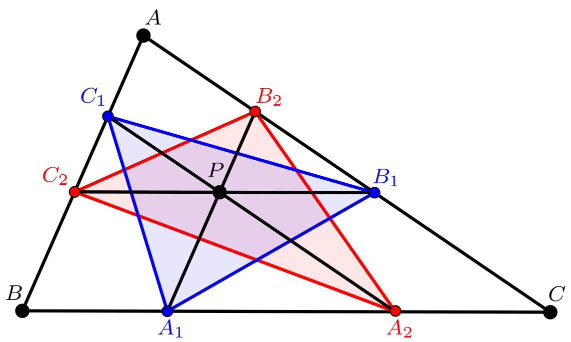
Problema 3. Num triângulo ABC, A_1, B_1 e C_1 estão sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente tais que as cevianas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes no ponto O. Defina $K = [ABC]$, $K_A = [OBC]$, $K_B = [AOC]$ e $K_C = [AOB]$. Mostre que
$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \quad \frac{BO}{OB_1} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \quad \text{e} \quad \frac{CO}{OC_1} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

Problema 4. (AIME) Num triângulo ABC, A_1, B_1 e C_1 estão sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Dado que AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes no ponto O, e que $\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} = 92$. Encontre o valor de $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{CO}{OC_1}$.

Problema 5. Em um $\triangle ABC$, AD, BE e CF são concorrentes no ponto P tal que $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ e $CF = 20$. Qual é a área do $\triangle ABC$?

Problema 6. Em um triângulo $\triangle ABC$, sejam S o ponto médio da mediana AP correspondente ao vértice A e Q o ponto de interseção de BS com o lado AC. Demonstrar que $BS = 3QS$.

Problema 7. No triângulo $\triangle ABC$, os pontos A_1 e A_2 se encontram no segmento BC, B_1 e B_2 se encontram no segmento AC e C_1 e C_2 se encontram no segmento AB, de forma tal que os segmentos C_1A_2, C_2B_1 e A_1B_2 são paralelos aos lados do $\triangle ABC$ e se intersectam no ponto P. Prove que as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são iguais.



Soluções

1. Os triângulos $\triangle PBC$ e $\triangle ABC$ compartilham a base BC, logo as respectivas cevianas PL e AL se encontram na mesma proporção que as áreas, ou seja

$$\frac{PL}{AL} = \frac{[PBC]}{[ABC]}.$$

Analogamente, temos

$$\frac{PM}{BM} = \frac{[APC]}{[ABC]} \quad \text{e} \quad \frac{PN}{CN} = \frac{[ABP]}{[ABC]}.$$

Isto implica

$$\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN} = \frac{[PBC] + [APC] + [ABP]}{[ABC]} = \frac{[ABC]}{[ABC]} = 1.$$

Para o item (b), escrevemos

$$AP = AL - PL, \;\; BP = BM - PM \;\; \text{e} \;\; CP = CN - PN.$$

Usando o item (a), obtemos

$$\frac{AP}{AL} + \frac{BP}{BM} + \frac{CP}{CN} = 3 - \left(\frac{PL}{AL} + \frac{PM}{BM} + \frac{PN}{CN}\right) = 3 - 1 = 2.$$

2. Como O é o circuncentro do $\triangle ABC$, temos que $AO = BO = CO = R$. Usando o item (b) do problema anterior, temos

$$\frac{R}{AD} + \frac{R}{BE} + \frac{R}{CF} = \frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2.$$

Dividindo por R em ambos lados, obtemos o resultado desejado.

3. Provaremos $\frac{AO}{OA_1} = \frac{K_B+K_C}{K_A}$. As outras igualdades são análogas.

Sejam R e S, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde O e A até BC. Como $\triangle AA_1S \sim \triangle OA_1R$ temos que

$$\frac{AA_1}{OA_1} = \frac{AS}{OR} = \frac{K}{K_A}.$$

Como $AA_1 = AO + OA_1$ e $K = K_A + K_B + K_C$, a igualdade acima implica

$$1 + \frac{AO}{OA_1} = 1 + \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

Subtraindo 1 em ambos lados, obtemos a igualdade desejada.

4. Denotemos por $K_A = [OBC]$, $K_B = [AOC]$ e $K_C = [AOB]$. No problema anterior mostramos que

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{K_B + K_C}{K_A}, \;\; \frac{BO}{OB_1} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \quad \text{e} \quad \frac{CO}{OC_1} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

Logo $\frac{AO}{OA_1} + \frac{BO}{OB_1} + \frac{CO}{OC_1} = 92$ implica que

$$K_B^2 K_C + K_B K_C^2 + K_A^2 K_C + K_A K_C^2 + K_A^2 K_B + K_A K_B^2 = 92\, K_A K_B K_C.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{AO}{OA_1}\cdot\frac{BO}{OB_1}\cdot\frac{CO}{OC_1} &= \frac{(K_B+K_C)(K_A+K_C)(K_A+K_B)}{K_AK_BK_C}\\ &= \frac{K_B^2K_C+K_BK_C^2+K_A^2K_C+K_AK_C^2+K_A^2K_B+K_AK_B^2+2\,K_AK_BK_C}{K_AK_BK_C}\\ &= \frac{92\,K_AK_BK_C+2\,K_AK_BK_C}{K_AK_BK_C}\\ &= 94.\end{aligned}$$

5. Chamemos de $S=[APE]$. Como as bases dos triângulos $\triangle APE$ e $\triangle ABP$ se encontram numa mesma reta, temos

$$\frac{[APE]}{[ABP]}=\frac{3}{9}\implies [ABP]=3S.$$

Como P é ponto médio de AD, temos

$$[BPD]=[ABP]=3S.$$

Chamemos de $Q=[CPE]$. Temos

$$[CPD]=[ACP]=[APE]+[CPE]=S+Q.$$

A ceviana CP do $\triangle BCE$, o divide em dois triângulos cujas áreas se encontram na proporção

$$\frac{[BPC]}{[CPE]}=\frac{9}{3}=3.$$

Logo

$$3=\frac{[BPD]+[CPD]}{[CPE]}=\frac{3S+S+Q}{Q},$$

donde concluímos $Q=2S$.

Agora chamemos de $T=[AFP]$, logo $[BFP]=3S-T$. Olhando para o $\triangle AFC$ e a ceviana AP, temos

$$\frac{FP}{20-FP}=\frac{[AFP]}{[ACP]}=\frac{T}{3S}.$$

E, olhando para o $\triangle BFC$ e a ceviana BP, temos

$$\frac{FP}{20-FP}=\frac{[BFP]}{[BCP]}=\frac{3S-T}{6S}.$$

Isso implica que $\frac{T}{3S}=\frac{3S-T}{6S}$, donde obtemos $T=S$. Concluímos também que $\frac{FP}{20-FP}=\frac{1}{3}$, donde obtemos $FP=5$ e, consequentemente, $CP=15$.

Note agora que $[ABD]=[ADC]=6S$, o que implica que D é ponto médio de BC.

Chamemos de x o comprimento dos segmentos BD e DC. Usaremos a fórmula de Heron nos triângulos (de área igual) $\triangle PBD$ e $\triangle PDC$:

$$\sqrt{\left(\frac{15+x}{2}\right)\left(\frac{15-x}{2}\right)\left(\frac{x+3}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{21+x}{2}\right)\left(\frac{21-x}{2}\right)\left(\frac{x+9}{2}\right)\left(\frac{x-9}{2}\right)},$$

$$\implies (15^2-x^2)(x^2-3^2)=(21^2-x^2)(x^2-9^2),$$

donde obtemos $x^2=117$. Como $[PBD]=3S$, temos, novamente usando a fórmula de Heron, que

$$3S=\sqrt{\frac{(15^2-x^2)(x^2-3^2)}{16}}=\sqrt{\frac{(15^2-117)(117-3^2)}{16}}=27,$$

donde obtemos $S=9$ e, finalmente, $[ABC]=12S=108$.

6. Usando o Problema 3, temos que

$$\frac{BS}{QS} = \frac{[ABS] + [BSC]}{[ACS]}.$$

Como BS, CS e AM são medianas dos triângulos ABM, ACM e ABC, respectivamente, temos que $[ABS] = [BSM] = \frac{1}{2}[BSC]$ e $[ACS] = [MSC] = \frac{1}{2}[BSC]$.

$$\frac{BS}{QS} = \frac{\frac{1}{2}[BSC] + [BSC]}{\frac{1}{2}[BSC]} = 3.$$

7. Os triângulos $\triangle A_1B_1P$ e $\triangle A_2B_1P$ compartilham a base B_1P e, como $B_1C_2 \parallel BC$, também possuem a mesma altura relativa a essa base, logo $[A_1B_1P] = [A_2B_1P]$. Agora, os triângulos $\triangle A_2B_1P$ e $\triangle A_2B_2P$ compartilham a base A_2P e, como $A_2C_1 \parallel AC$, eles também possuem a mesma altura, logo $[A_2B_1P] = [A_2B_2P]$.

Acabamos de mostrar que

$$[A_1B_1P] = [A_2B_1P] = [A_2B_2P].$$

Um argumento análogo mostra que

$$[A_1C_1P] = [A_1C_2P] = [A_2C_2P]$$

e

$$[B_1C_1P] = [B_2C_1P] = [B_2C_2P].$$

Como $[A_1B_1C_1] = [A_1B_1P] + [A_1C_1P] + [B_1C_1P]$ e $[A_2B_2C_2] = [A_2B_2P] + [A_2C_2P] + [B_2C_2P]$, concluímos a prova.