Equações de Pell

Uma Equação Famosa

Vejamos um problema que servirá de motivação ao nosso estudo.

Exemplo 1. *Sejam F_n e L_n as seqüências de Fibonacci e Lucas, respectivamente, definidas por*

$$\begin{array}{llll} F_1 = 1, & F_2 = 1 & e & F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geq 2, \\ L_1 = 1, & L_2 = 3 & e & L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{array}$$

Mostre que a equação $5x^2 - y^2 = 4$ admite uma solução (x, y) em inteiros positivos se, e somente se, $(x, y) = (F_{2n-1}, L_{2n-1})$ para algum natural n.

Note que $(1, 1)$ é a única solução com $y \leq 2$. Podemos supor, portanto, que $y \geq 3$. Sendo α, β as duas raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, é conhecido que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{e} \quad L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

É trivial verificar que os pares (F_{2n-1}, L_{2n-1}) satisfazem nossa equação. A parte difícil é mostrar que essas são as únicas soluções. Seja

$$S = \{(F_{2n-1}, L_{2n-1}), \quad n \geq 1\}.$$

Por absurdo, suponha que exista uma solução $(x, y) \notin S$, e tome aquela que minimiza o valor de x. Como x e y têm a mesma paridade, as frações $(3x - y)/2$ e $(3y - 5x)/2$ são inteiros positivos, pois

$$x^2 > -1 \;\Rightarrow\; 9x^2 > 5x^2 - 4 \;\Rightarrow\; 9x^2 > y^2 \;\Rightarrow\; 3x > y$$

e

$$y^2 > 5 \;\Rightarrow\; 9y^2 > 5y^2 + 20 \;\Rightarrow\; 9y^2 > 25x^2 \;\Rightarrow\; 3y > 5x.$$

Afirmamos que $((3x-y)/2,(3y-5x)/2)$ é uma solução da equação que não está em S. De fato,

$$5\left(\frac{3x-y}{2}\right)^2-\left(\frac{3y-5x}{2}\right)^2=\frac{20x^2-4y^2}{4}=4,$$

e, se $((3x-y)/2,(3y-5x)/2)\in S$, existiria n para o qual

$$\begin{array}{rrcr} & \dfrac{3x-y}{2}=F_{2n-1} & \text{e} & \dfrac{3y-5x}{2}=L_{2n-1} \\ \iff & x=F_{2n+1} & \text{e} & y=L_{2n+1}, \end{array}$$

o que contraria o fato de (x,y) não estar em S. Para terminar, note que $(3x-y)/2<x$, ou seja, obtemos uma solução cuja primeira coordenada é menor que x. Pelo método da Descida de Fermat, concluímos que todas as soluções estão em S.

Exemplo 2. *(Vietnã 1999) A seqüência a_n é definida por $a_1=1$, $a_2=2$ e $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$, $n\geq 1$. A seqüência b_n é definida por $b_1=1$, $b_2=4$ e $b_{n+2}=3b_{n+1}-b_n$, $n\geq 1$. Mostre que os inteiros positivos (a,b) satisfazem $5a^2-b^2=4$ se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a_n,b_n)=\mathrm{mdc}(a,b)$.*

Veja que encontramos uma família infinita de soluções para o problema anterior. Curiosamente, essa família satisfaz uma recorrência linear bem simples. Note ainda que $\sqrt{5}$ apareceu na fórmula que encontramos para F_{2n+1} e L_{2n+1}. Será que tudo isso foi coincidência? Nosso próximo objetivo será estudar mais detalhadamente equações como a do problema anterior.

A equação $x^2-dy^2=N$, onde d é natural e N é inteiro, é chamada *equação de Pell.* Jonh Pell contribuiu muito pouco para a análise desta equação. Ela recebeu seu nome apenas por um engano de Euler. Lagrange foi o primeiro a provar que, se d não é um quadrado perfeito, então $x^2-dy^2=1$ tem infinitas soluções. Estamos interessados em descrever todas as possíveis soluções desta equação, caso existam, e tentar obter alguns critérios para dizer quando ela não tem solução. Trataremos apenas do caso em que d não é um quadrado perfeito. O outro caso é deixado como exercício para o leitor.

Observação 3. *(Para professores) Caso os alunos não estejam preparados para o formalismo nas próximas demonstrações, o professor poderá ater-se apenas aos problemas. Bastaria o aluno entender como se caracterizam as soluções de uma equação de Pell. Após alguma amadurecimento,ficaria mais fácil estudar as provas e entender porque as soluções só podem ser daquela forma.*

A próxima proposição é um conhecido exercício de princípio da casa dos pombos.

Proposição 4. *Se ξ é um número irracional, existem infinitos números racionais x/y, com $\mathrm{mdc}(x,y)=1$, tais que*

$$\left|\xi-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{y^2}.$$

Demonstração. Considere a partição

$$[0,1) = \left[0\,,\ \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}\,,\ \frac{2}{n}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}\,,\ 1\right).$$

Pelo princípio da casa dos pombos, dois dentre os números 0, $\{\xi\}$, $\{2\xi\}$, ..., $\{n\xi\}$ estão em um mesmo intervalo da partição, digamos

$$\{k\xi\},\ \{j\xi\} \in \left[\frac{i}{n}\,,\ \frac{i+1}{n}\right), \quad 0 \le k < j \le n \ \text{ e } \ 0 \le i < n.$$

Então

$$\begin{aligned} |\{j\xi\} - \{k\xi\}| &< \frac{1}{n} \\ |(j-k)\xi - (\lfloor j\xi \rfloor - \lfloor k\xi \rfloor)| &< \frac{1}{n} \\ \left|\xi - \frac{x'}{y'}\right| &< \frac{1}{ny'}\,, \end{aligned}$$

onde $x' = \lfloor j\xi \rfloor - \lfloor k\xi \rfloor$ e $y' = j-k$. Seja $d = \mathrm{mdc}(x', y')$, com $x' = dx$ e $y' = dy$, $\mathrm{mdc}(x,y) = 1$. Temos

$$\left|\xi - \frac{x}{y}\right| = \left|\xi - \frac{x'}{y'}\right| < \frac{1}{ny'} < \frac{1}{y'^2} < \frac{1}{y^2}\,.$$

Para obter infinitas soluções, tome $m > 1/\left|\xi - x/y\right| \neq 0$. Com o mesmo argumento acima, particionando agora o intervalo $[0,1)$ em m intervalos de mesmo tamanho, obtemos um par de inteiros (x_1, y_1) primos entre si, $0 < y_1 < m$, tais que

$$\left|\xi - \frac{x_1}{y_1}\right| < \frac{1}{my_1} < \left|\xi - \frac{x}{y}\right|$$

e portanto x_1/y_1 é uma aproximação racional de ξ melhor do que x/y.
Dizemos que um inteiro n é livre de quadrados se não existe nenhum natural $k > 1$ tal que $k^2 | n$.

Proposição 5. *Seja d um inteiro positivo livre de quadrados. Existe uma constante M tal que a desigualdade*

$$\left|x^2 - dy^2\right| < M$$

tem infinitas soluções inteiras positivas (x,y).

Demonstração. É claro que, se d é livre de quadrados, então $\sqrt{d}$ é irracional. Pela proposição anterior, existem infinitos pares de inteiros (x,y), com $y > 0$ e $\mathrm{mdc}(x,y) = 1$, tais que $|x - y\sqrt{d}| < 1/y$. Aplicando a desigualdade triangular, temos

$$\left|x + y\sqrt{d}\right| \le \left|x - y\sqrt{d}\right| + 2y\sqrt{d} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}.$$

Multiplicando as duas desigualdades encontradas, obtemos

$$\left|x^2 - dy^2\right| < \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}\right) \leq 2\sqrt{d} + 1,$$

o que conclui a demonstração. ∎

Se (x, y) é solução da equação de Pell, é claro que $(\pm x, \pm y)$ também é. Suporemos, a partir daqui, que $x, y > 0$.

Teorema 6. *Se d é um inteiro positivo livre de quadrados, então a equação $x^2 - dy^2 = 1$ tem infinitas soluções inteiras. Ademais, existe uma solução (x_1, y_1), chamada de solução fundamental, tal que toda solução é da forma (x_n, y_n), $n \geq 1$, onde $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$.*

Demonstração. Vamos mostrar a existência de uma solução. Pela proposição anterior, existem infinitos pares de inteiros (x, y) tais que $\left|x^2 - dy^2\right| < M$. Existe, portanto, um inteiro m, $1 \leq m \leq M$, tal que a equação $\left|x^2 - dy^2\right| = m$ tem infinitas soluções. Módulo m, cada solução está no conjunto finito

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\right\} \times \left\{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\right\},$$

e daí, com um argumento análogo ao anterior, existe um par $(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ tal que uma quantidade infinita de soluções (x, y) satisfaz $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{a}, \overline{b})$. Em particular, existem soluções distintas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tais que $(\overline{x_1}, \overline{y_1}) = (\overline{x_2}, \overline{y_2})$. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} &= \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{d}\right)}{m} \\
&= \frac{(x_1x_2 - dy_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\sqrt{d}}{m} \\
&= u + v\sqrt{d},
\end{aligned}$$

onde u, v são inteiros, pois

$$\begin{aligned}
x_1x_2 - dy_1y_2 &\equiv {x_1}^2 - d{y_1}^2 &\equiv 0 \pmod{m} \\
x_2y_1 - x_1y_2 &\equiv x_1y_1 - x_1y_1 &\equiv 0 \pmod{m}.
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
u^2 - dv^2 &= \left(u + v\sqrt{d}\right) \cdot \left(u - v\sqrt{d}\right) \\
&= \frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{x_2 + y_2\sqrt{d}} \cdot \frac{x_1 - y_1\sqrt{d}}{x_2 - y_2\sqrt{d}} \\
&= \frac{{x_1}^2 - d{y_1}^2}{{x_2}^2 - d{y_2}^2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

mostrando a existência de solução. Vejamos agora como são as soluções.

Diremos que uma solução (x_1, y_1) é maior que uma solução (x_2, y_2) se $x_1+y_1\sqrt{d} > x_2+y_2\sqrt{d}$. Seja (x_1, y_1) a menor solução, com $x_1, y_1 > 0$. Chamaremos esta solução de *fundamental*. Dada outra solução (x, y), vamos mostrar que existe n para o qual $x+y\sqrt{d} = (x_1+y_1\sqrt{d})^n$. De fato, se esse não é o caso, para algum n valem as seguintes desigualdades

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n < x + y\sqrt{d} < \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{n+1},$$

e daí

$$\begin{array}{rcccl} 1 & < & \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{-n} & < & x_1 + y_1\sqrt{d} \\ 1 & < & \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^{n} & < & x_1 + y_1\sqrt{d} \\ 1 & < & A + B\sqrt{d} & < & x_1 + y_1\sqrt{d}, \end{array}$$

onde (A, B) é uma solução formada por inteiros positivos (prove!). Isso contraria a minimilidade do par (x_1, y_1). Assim, toda solução (x, y) deve satisfazer $x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, para algum $n \geq 1$, e uma fácil verificação mostra que esses pares são de fato soluções da equação. ■

Exemplo 7. *Encontre todos os triângulos cujos lados são inteiros consecutivos e cuja área é inteira.*

Sejam $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$ os lados do triângulo. Pela fórmula de Herão, a área do triângulo é

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)} = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2 - 4)}.$$

A é inteiro se e somente se n é par e $3(n^2 - 4)$ é um quadrado perfeito. Substituindo n por $2x$ e A por ny, obtemos a equação $3x^2 - 3 = y^2$. Então y é divisível por 3, digamos $y = 3z$, e daí a equação anterior equivale à equação de Pell $x^2 - 3z^2 = 1$. A solução fundamental dessa última é $(x_1, z_1) = (2, 1)$, donde todas as outras soluções são geradas pelas recorrências $x_{n+1} = 2x_n + 3z_n$ e $z_{n+1} = x_n + 2z_n$, $n \geq 1$. Os triângulos procurados são os que têm lados de medidas $2x_n - 1$, $2x_n$ e $2x_n + 1$, cuja área é $3x_nz_n$.

Exemplo 8. *Encontre o menor inteiro positivo n para o qual $19n+1$ e $95n+1$ sejam ambos quadrados perfeitos.*

Sejam $19n + 1 = x^2$ e $95n + 1 = y^2$. Então $5x^2 - y^2 = 4$, que é a equação analisada no problema 45. Suas soluções são os pares (F_{2m-1}, L_{2m-1}), $m \geq 1$. Para que n seja mínimo, basta calcular o menor número da seqüência de Fibonacci múltiplo de 19, que é $F_{17} = 1597$. Assim,

$$n = \frac{{F_{17}}^2 - 1}{19} = 134232.$$

Exemplo 9. *Dado $n > 1$, mostre que existe um conjunto S de n pontos no plano tal que:*

1. *Não existem três pontos de S colineares;*

2. *A distância entre quaisquer dois pontos de S é um inteiro.*

Como a equação de Pell $x^2 - 2y^2 = -1$ admite a solução $(1, 1)$, ela admite infinitas. Sejam então $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros satisfazendo as seguintes condições:

(i) ${a_i}^2 + 1 = 2{b_i}^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Tome $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, onde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são pontos sobre a circunferência unitária definidos por

$$P_i = \left(\frac{2a_i}{{a_i}^2 + 1}, \frac{{a_i}^2 - 1}{{a_i}^2 + 1} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Um cálculo simples mostra que a distância entre quaisquer dois pontos de S é racional. Multiplicando as coordenadas desses pontos pelo mínimo múltiplo comum dos denominadores de todas as frações das distâncias entre dois pontos, obtemos um conjunto de n pontos sobre uma mesma circunferência, em particular não existindo três colineares, tais que a distância entre quaisquer dois deles é inteira.

Problema 10. *(IMO 1975) Existem 1975 pontos sobre uma circunferência de raio 1 de modo que a distância entre quaisquer dois desses pontos é racional?*

Problema 11. *Seja $n \geq 3$ um inteiro. Mostre que existe um conjunto S de n pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos de S é irracional e a área de qualquer triângulo com vértices em S é racional.*

Problema 12. *Prove que a equação $x^2 - dy^2 = -1$ não tem solução se d é divisível por um primo da forma $4k + 3$.*

Problema 13. *Sejam d, k inteiros positivos tais que d não é um quadrado perfeito. Mostre que existem infinitos pares de inteiros positivos (x, y) tais que $k|y$ e $x^2 - dy^2 = 1$.*

Outros Resultados

Para o leitor familiarizado com frações contínuas, basta sabermos as n-ésimas convergências da expansão de $\sqrt{d}$ para determinarmos as soluções de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$, como diz a proposição abaixo:

Proposição 14. *Todas as soluções de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$ podem ser encontradas em $x_n = h_n$, $y_n = k_n$, onde $\frac{h_n}{k_n}$ são as n-ésimas convergências da expansão em frações contínuas de $\sqrt{d}$. Se r é o período da expansão em frações contínuas de $\sqrt{d}$ temos:*

I) *Se r é par então $x^2 - \sqrt{d}y^2 = -1$ não tem solução e todas soluções positivas de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$ são dadas por $x = h_{nr-1}$, $y = k_{nr-1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$.*

II) *Se r ímpar então $x = h_{nr-1}$, $y = k_{nr-1}$ produzem todas as soluções de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = -1$ quando $n = 1, 3, 5, \dots$, e todas as soluções de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = 1$ quando $n = 2, 4, 6 \dots$.*

Proposição 15. *(*Equação de Pell generalizada*)Consideremos $ax^2 - by^2 = c$, onde a e b não são simultaneamente iguais a 1 e eles também não são divisíveis por nenhum quadrado, então as soluções são obtidas da seguinte maneira: Se $c = 1$, e ambos a e b são diferentes de 1, determine primeiro a solução fundamental se existir. Todas as outras soluções são obtidas da solução fundamental (x_0, y_0) por $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^{2n+1}$. Se $c \neq 1$, primeiro determine a solução fundamental da equação $ax^2 - by^2 = 1$. Se a ou b é igual a 1, então esta equação tem no máximo um solução fundamental (x_0, y_0). Se (x_0', y_0') é uma solução fundamental de $ax^2 - by^2 = c$ todas as outras são obtidas de $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^n(x_0'\sqrt{a} + y_0'\sqrt{b})$. Se nem a ou b for igual a 1, as soluções são geradas por $x_n\sqrt{a} + y_n\sqrt{b} = (x_0\sqrt{a} + y_0\sqrt{b})^{2n}(x_0'\sqrt{a} + y_0'\sqrt{b})$.*

Corolário 16. *Suponha que N é um inteiro não nulo e que d seja livre de quadradados. Se $x^2 - dy^2 = N$ tem uma solução, então tem infinitas.*

Proposição 17. *Seja d um inteiro que não é um quadrado perfeito, sejam $\frac{h_n}{k_n}$ as n-ésimas convergências da expansão em fração contínua de $\sqrt{d}$. Seja N um inteiro tal que $|N| < d$. Então qualquer solução positiva de $x = s, y = t$ de $x^2 - \sqrt{d}y^2 = N$ com $mdc(s, t) = 1$ satisfaz $s = h_n$, $t = k_n$ para algum n.*

Problemas Propostos

Problema 18. *Mostre que existem infinitos inteiros n para os quais $n^2 + (n+1)^2$ é um quadrado perfeito.*

Problema 19. *Dado um inteiro positivo k, mostre que não existem inteiros (x, y) tais que $x^2 - (k^2 - 1)y^2 = -1$.*

Problema 21. *(Banco IMO 2002) Existe um inteiro positivo m para o qual a equação*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}=\frac{m}{a+b+c}$$

tem infinitas soluções inteiras positivas a, b, c?

Problema 22. *Determine todos os pares (k, n) de inteiros positivos tais que*

$$1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n.$$

Problema 23. *Encontre todos os números da forma $m(m+1)/3$ que são quadrados perfeitos.*

Problema 24. *Encontre todos os números triangulares que são quadrados perfeitos.*

Problema 25. *Resolva a equação $(x+1)^3-x^3=y^2$ em inteiros positivos.*

Problema 26. *Encontre todos os inteiros positivos n para os quais $2n+1$ e $3n+1$ sejam ambos quadrados perfeitos e mostre que todos esses inteiros são divisíveis por 40.*

Problema 27. *Seja n um inteiro positivo tal que $3n+1$ e $4n+1$ são ambos quadrados perfeitos. Mostre que n é divisível por 56.*

Problema 28. *Prove que existem infinitos inteiros positivos n para os quais n^2+1 divide $n!$.*

Problema 29. *Prove que a equação*

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

admite infinitas soluções inteiras positivas (x, y, z).

Problema 30. *Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existem inteiros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Problema 31. *(Vietnã 1992) Encontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) satisfazendo a equação*

$$x^2+y^2-5xy+5=0.$$

Problema 32. *Encontre todos os naturais n para os quais $n+1$ e $3n+1$ são ambos quadrados perfeitos.*

Problema 33. *Encontre todos os pares de naturais (m, n) satisfazendo a igualdade*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = m^2.$$

Problema 34. *(Banco IMO 1967) Qual fração p/q, onde p, q são inteiros positivos menores que 100, é a mais próxima de $\sqrt{2}$? Encontre todos os dígitos após a vírgula da representação decimal dessa fração que coincidem com os dígitos da representação decimal de $\sqrt{2}$.*

Problema 35. *(Banco IMO 2003) Seja $b > 5$ um inteiro. Para cada natural n, seja x_n a representação na base b do número*

$$\underbrace{11\cdots1}_{n-1}\underbrace{22\cdots2}_{n}5.$$

Prove que a seguinte condição é verdadeira se e somente se $b = 10$:

"Existe um inteiro positivo n_0 tal que, para cada $n > n_0$, o número x_n é um quadrado perfeito."

Problema 36. *(Torneio das Cidades 1997) Prove que a equação*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

tem infinitas soluções inteiras (x, y, z).

Problema 37. *(Irlanda 1995) Determine todos os inteiros a para os quais a equação*

$$x^2 + axy + y^2 = 1$$

tem infinitas soluções inteiras positivas (x, y) tais que $x \neq y$.

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números ? um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.