Problemas Resolvidos

Nível 2

Equações diofantinas IV

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

Problema 1. Sejam x e y números inteiros tais que $x^2 - 2y^2 = -1$. Prove que x e y são ambos ímpares.

Problema 2. Prove que a equação $x^2 - dy^2 = -1$ não tem solução nos inteiros se d é divisível por um primo da forma $4k + 3$.

Problema 3. Mostre que existem infinitos inteiros n para os quais $n^2 + (n + 1)^2$ é um quadrado perfeito.

Problema 4. Dado um inteiro positivo k, mostre que não existem inteiros (x, y) tais que

$$x^2 - (k^2 - 1)y^2 = -1.$$

Problema 5. Seja d um inteiro positivo que deixa resto 1 quando dividido por 4. Mostre que, se x e y são inteiros tais que $x^2 - dy^2 = 1$, então x é ímpar.

Problema 6. Seja p um primo da forma $4k + 1$. Prove que a equação $x^2 - py^2 = -1$ tem solução inteira.

Dica: Considere a equação de Pell $x^2 - py^2 = 1$ e utilize o resultado do problema anterior.

Problema 7. Seja $n \geq 3$ um inteiro. Mostre que existe um conjunto S de n pontos no plano tal que a distância entre quaisquer dois pontos de S é irracional e a área de qualquer triângulo com vértices em S é positiva e racional.

Dica: Procure por pontos da forma $\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$; utilize o resultado do problema anterior.

Problema 8. Encontre todos os pares (x, y) de inteiros positivos tais que

$$x^2 - 2y^2 = -1.$$

Problema 9. Encontre todos os pares (k, n) de inteiros positivos tais que

$$1 + 2 + \cdots + k = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + n.$$

Soluções

1. Olhando a equação do enunciado módulo 2, observamos que $x^2 \equiv -1 \pmod 2$. Daí, x há de ser ímpar.

Sendo x ímpar, $x^2 \equiv 1 \pmod 4$. Daí,

$$x^2 - 2y^2 = -1 \implies 1 - 2y^2 \equiv -1 \pmod 4 \implies 2y^2 \equiv 2 \pmod 4.$$

Portanto, y também é ímpar (se fosse par, $2y^2$ seria divisível por 4).

2. Se p divide d, $x^2 - dy^2 = -1$ implica $x^2 \equiv -1 \pmod p$. Como sabemos, isso é absurdo quando p é da forma $4k+3$.

Para refrescar nossa memória, segue a justificativa. Para que se tenha $x^2 \equiv -1 \pmod p$, p não pode dividir x. Daí, pelo Teorema de Fermat, $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. No entanto,

$$x^2 \equiv -1 \pmod p \Rightarrow x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p \Rightarrow x^{p-1} \equiv -1 \pmod p,$$

onde na última passagem utilizamos que p é da forma $4k+3$. O resultado segue por absurdo.

3. Devemos mostrar que existem infinitos pares (n, m) de inteiros tais que

$$n^2 + (n+1)^2 = m^2.$$

Observe que

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 = m^2 &\iff 2n^2 + 2n + 1 = m^2 \\ &\iff 4n^2 + 4n + 2 = 2m^2 \\ &\iff (2n+1)^2 + 1 = 2m^2 \\ &\iff (2n+1)^2 - 2m^2 = -1. \end{aligned}$$

Bem, 2 não é um quadrado perfeito, e a equação $x^2 - 2y^2 = -1$ tem uma solução: $(1, 1)$. Logo, $x^2 - 2y^2 = -1$ tem infinitas soluções inteiras. É claro que, em todas elas, x é ímpar e, portanto, da forma $2n+1$.

Dessa forma, segue que a equação $n^2 + (n+1)^2 = m^2$ tem infinitas soluções inteiras, isto é, que existem infinitos inteiros n para os quais $n^2 + (n+1)^2$ é um quadrado perfeito.

4. Suponhamos, por absurdo, que k, x e y são inteiros tais que

$$x^2 - (k^2-1)y^2 = -1.$$

Se k é par, k^2 é divisível por 4. Daí, nesse caso, $(k^2 - 1) \equiv -1 \pmod 4$. Dessa forma, k ser par implicaria $x^2 + y^2 \equiv -1 \pmod 4$. Esta congruência é absurda, dado que um quadrado perfeito só pode deixar resto 0 ou 1 quando dividido por 4.

Por outro lado, se k é ímpar, k^2 deixa resto 1 quando dividido por 4 e, daí, $(k^2 - 1) \equiv 0 \pmod 4$. Dessa forma, k ser ímpar implicaria $x^2 \equiv -1 \pmod 4$. Absurdo também, dado que x^2 só pode deixar resto 0 ou 1 quando dividido por 4.

Segue assim que não existem inteiros k, x e y tais que

$$x^2 - (k^2-1)y^2 = -1.$$

5. Se x fosse par, teríamos $x^2 \equiv 0 \pmod 4$, donde

$$-dy^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

isto é,

$$-y^2 \equiv 1 \pmod 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 \equiv -1 \pmod 4.$$

Absurdo, pois nenhum quadrado perfeito deixa resto -1 quando dividido por 4.

6. Como p é primo, p não é um quadrado perfeito e, portanto, a equação

$$x^2 - py^2 = 1$$

tem infinitas soluções inteiras. Seja $(a,\, b)$ a solução mínima.

Podemos reescrever $a^2 - pb^2 = 1$ como $a^2 - 1 = pb^2$, isto é,

$$(a-1)(a+1) = pb^2. \tag{1}$$

Como vimos no problema anterior, do fato de que p é da forma $4k+1$ segue que a é ímpar. É claro que, para que (1) seja satisfeita, b tem que ser par. Escrevendo $a = 2s+1$ e $b = 2t$, observamos por (1) que

$$2s(2s+2) = p4t^2 \iff s(s+1) = pt^2.$$

Como $\mathrm{mdc}(s,\, s+1) = 1$, vem daí que ou $s = pm^2$ e $s+1 = n^2$ para alguns inteiros m e n, ou $s = m^2$ e $s+1 = pn^2$ (para alguns inteiros m e n). Se fosse o primeiro caso, teríamos

$$n^2 - pm^2 = (s+1) - s = 1,$$

donde $(n,\, m)$ seria outra solução para a equação $x^2 - py^2 = 1$. Isso seria absurdo, pois $n \le s+1 \le a$, e $(a,\, b)$ é a solução mínima. Logo, o segundo caso é o que ocorre de fato, isto é, temos $s = m^2$ e $s+1 = pn^2$ para alguns inteiros m e n. Essas igualdades nos dão

$$m^2 - pn^2 = s - (s+1) = -1,$$

o que mostra que a equação do enunciado tem solução.

7. A área de qualquer triângulo ser positiva equivale a não existirem (em S) três pontos colineares. Formaremos então o conjunto S com pontos da circunferência unitária; assim, garantimos que não haverá tripla de pontos colineares.

A área do triângulo determinado pelos pontos $(a_1,\, b_1)$, $(a_2,\, b_2)$ e $(a_3,\, b_3)$ é

$$\frac{|a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3|}{2}.$$

Dessa forma, para garantirmos que a área de qualquer triângulo seja um número racional, basta que escolhamos todos os pontos com coordenadas racionais.

Os pontos da circunferência unitária cujas coordenadas são racionais são exatamente os pontos da forma

$$\left(\frac{2t}{t^2+1},\ \frac{t^2-1}{t^2+1}\right),$$

com t um número racional (na verdade, há um ponto de coordenadas racionais, pertencente à circunferência unitária, que não é da forma acima: o ponto $(0,\, 1)$. Mas ele não nos fará falta.).[1]

Com um pouco de conta, podemos descobrir qual a distância entre dois pontos da forma acima: a distância cartesiana entre os pontos $\left(\frac{2a}{a^2+1},\, \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$ e $\left(\frac{2b}{b^2+1},\, \frac{b^2-1}{b^2+1}\right)$ é

[1] Por favor, não se assuste com o resultado. Por mais que ele seja verdadeiro, não nos interessa que todos os pontos de coordenadas racionais são da forma citada; tudo de que precisamos para o problema é que todos os pontos da forma citada têm coordenadas racionais, e isso é muito mais simples de verificar.

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\frac{2a}{a^2+1}-\frac{2b}{b^2+1}\right)^2+\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)^2}\\
&\qquad = \sqrt{\left(\frac{2ab^2+2a-2a^2b-2b}{(a^2+1)(b^2+1)}\right)^2+\left(\frac{a^2b^2+a^2-b^2-1-a^2b^2-b^2+a^2+1}{(a^2+1)(b^2+1)}\right)^2}\\
&\qquad = \sqrt{\left(\frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}\right)^2+\left(\frac{2(a-b)(a+b)}{(a^2+1)(b^2+1)}\right)^2}\\
&\qquad = \frac{2(a-b)}{(a^2+1)(b^2+1)}\sqrt{(1-ab)^2+(a+b)^2}\\
&\qquad = \frac{2(a-b)}{(a^2+1)(b^2+1)}\sqrt{1+a^2b^2+a^2+b^2}\\
&\qquad = \frac{2(a-b)}{(a^2+1)(b^2+1)}\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Assim, quando a e b são racionais, a distância entre $\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$ e $\left(\frac{2b}{b^2+1},\ \frac{b^2-1}{b^2+1}\right)$ é racional se, e somente se, $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$ é racional.

Agora já estamos aptos a entender a solução do problema. A proposta é escolher pontos

$$\left(\frac{2t_i}{t_i^2+1},\ \frac{t_i^2-1}{t_i^2+1}\right),$$

com cada t_i inteiro e tal que $t_i^2+1=p_ir_i^2$, onde r_i é um inteiro qualquer e p_i é um primo. A chave, aqui, é que os primos p_i sejam todos distintos. De fato, observe que, se a e b são tais que $a^2+1=pm^2$ e $b^2+1=qn^2$, então

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1}=mn\sqrt{pq},$$

que jamais será racional se p e q forem primos distintos.

Tudo de que precisamos, portanto, é garantir que existem inteiros $(t_1,t_2,t_3,\dots)$ e primos $(p_1,p_2,p_3,\dots)$, todos distintos, tais que $t_1^2+1=p_1r_1^2$, $t_2^2+1=p_2r_2^2$, $t_3^2+1=p_3r_3^2$, e assim sucessivamente, para alguns inteiros $(r_1,r_2,r_3,\dots)$. Ora, esse resultado nos dá o problema anterior: para todo primo p da forma $4k+1$, existem inteiros t e r tais que $t^2-pr^2=-1$, isto é, tais que $t^2+1=pr^2$. Como existem infinitos primos da forma $4k+1$, o problema está resolvido.

8. A solução mínima da equação de Pell $x^2-2y^2=1$ é (3, 2). De fato, se tivéssemos $y=1$ na equação, haveríamos de ter $x=\sqrt{3}$; assim, $y\ge 2$. Por outro lado, (3, 2) é uma solução, como podemos verificar facilmente.

Passemos à equação do problema. $x^2-2y^2=-1$ tem uma solução: $(1,1)$. É claro que esta é a solução mínima. Como

$$\big(x+\sqrt{2}y\big)\big(3+2\sqrt{2}\big)=(3x+4y)+\sqrt{2}(2x+3y),$$

segue da teoria estudada que as soluções inteiras e positivas da equação $x^2-2y^2=-1$ são os pares $(x_n,\ y_n)$, onde (x_n) e (y_n) são sequências tais que

$$x_0=y_0=1 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_{n+1}=3x_n+4y_n \\ y_{n+1}=2x_n+3y_n \end{cases} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, temos

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4y_{n+1} = 3(3x_n + 4y_n) + 4(2x_n + 3y_n) = 17x_n + 24y_n.$$

Daí,

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} = 17x_n + 24y_n - 6(3x_n + 4y_n) = -x_n,$$

ou seja,

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n.$$

Logo, (x_n) é a sequência que satisfaz $x_0 = 1$, $x_1 = 7$ (o valor de x_1 pode ser calculado através de (1)) e $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. A resolução de recorrências foge do escopo deste material, mas métodos padrões nos mostram que, nessas condições,

$$x_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Podemos repetir o mesmo processo para encontrar a fórmula de y_n. Para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, temos

$$y_{n+2} = 2x_{n+1} + 3y_{n+1} = 2(3x_n + 4y_n) + 3(2x_n + 3y_n) = 12x_n + 17y_n.$$

Daí,

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} = 12x_n + 17y_n - 6(2x_n + 3y_n) = -y_n,$$

ou seja,

$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n.$$

Logo, (y_n) é a sequência que satisfaz $y_0 = 1$, $y_1 = 5$ e $y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Resolvendo a recorrência, encontramos que

$$y_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n \quad \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, as soluções inteiras positivas da equação

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

são os pares da forma $(x_n,\, y_n)$, sendo

$$x_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$$

e

$$y_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n.$$

9. Queremos encontrar todos os pares $(k,\, n)$ de inteiros positivos tais que

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n &\iff 2\big(1+2+\cdots+k\big)=1+2+\cdots+n\\
&\iff k(k+1)=\frac{n(n+1)}{2}\\
&\iff 8k(k+1)=4n(n+1)\\
&\iff 8k^2+8k=4n^2+4n\\
&\iff 8k^2+8k+1=4k^2+4k+1\\
&\iff 2(4k^2+2k+1)-1=4n^2+4n+1\\
&\iff 2(2k+1)^2-1=(2n+1)^2\\
&\iff (2n+1)^2-2(2k+1)^2=-1.
\end{aligned}
$$

Como 2 não é um quadrado perfeito, a equação de Pell $x^2-2y^2=1$ possui infinitas soluções inteiras positivas. Por outro lado, a equação $x^2-2y^2=-1$ possui uma solução: $(1,\, 1)$. Logo, $x^2-2y^2=-1$ possui infinitas soluções inteiras positivas.

Pelo problema 1, sabemos que todas as soluções de $x^2-2y^2=-1$ são formadas por um par de números ímpares, isto é, são da forma $(2n+1,\, 2k+1)$. Além disso, a única solução inteira e positiva que não serve para os nossos preceitos é $(1,\, 1)$, já que se $2n+1=1$, então $n=0$. É fácil verificar que, se uma das variáveis for maior que 1, a outra também será.

Portanto, os pares $(k,\, n)$ de inteiros positivos que satisfazem

$$1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n$$

são exatamente os pares da forma $\left(\frac{b-1}{2},\, \frac{a-1}{2}\right)$, onde a e b são inteiros maiores que 1 tais que $(a,\, b)$ é solução da equação $x^2-2y^2=-1$.

A solução do problema anterior faz o resto do trabalho: os pares $(k,\, n)$ de inteiros positivos que satisfazem

$$1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n$$

são exatamente os pares $\left(\frac{b_m-1}{2},\, \frac{a_m-1}{2}\right)$, onde

$$a_m=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\big(3+2\sqrt{2}\big)^m+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\big(3-2\sqrt{2}\big)^m,$$

$$b_m=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\big(3+2\sqrt{2}\big)^m+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\big(3-2\sqrt{2}\big)^m$$

e

$$m\geq 1.$$