Problemas Resolvidos

Nível 2

Equações e Sistemas de Equações

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problemas que envolvem manipulações inteligentes ou substituições

Problema 1. (OBM 1997) Encontre as soluções reais de

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0 \\ x^3 - x^2y - xy^2 + x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

Problema 2. (OBM 1997) Quantos pares (x, y) de inteiros satisfazem a equação $x + y + xy = 120$?

Problema 3. (OBM 2006) Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$. Determine $a + b$ e ab.

Problema 4. (OBM 2005) Os inteiros positivos (x, y) satisfazem a equação

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1.$$

Qual das alternativas apresenta um possível valor de y?
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Problema 5. Prove que a equação

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \frac{1}{\sqrt{2012 - x} + \sqrt{1006}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{2012 - x}}$$

tem exatamente 2013 soluções inteiras.

Problema 6. Os números reais a, b e c são distintos dois a dois e tais que:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Encontre todos os valores possíveis de abc.

Problema 7. (OBM 2012) Quantas soluções reais tem o sistema

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{z^2} \\ y + z = \frac{1}{x^2} \\ z + x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \quad ?$$

Problema 8. Prove que $4x^3 - 3x + 1 = 2y^2$ tem ao menos 31 soluções com x e y inteiros positivos e $x \leq 1980$.

Problema 9. (OBM 2008 adaptado) Prove que $\sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27+5\sqrt{33}} = -\sqrt[3]{18}$.

Problema 10. Encontre as soluções reais de

$$\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-5} + \frac{17}{x-17} + \frac{19}{x-19} = x^2 - 11x - 4.$$

Problema 11. Encontre as soluções complexas de

$$(3z+1)(4z+1)(6z+1)(12z+1) = 2.$$

Problema 12. (Armênia 1999) Resolva a equação

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(4-\sqrt{3}x)^2} = 1.$$

Problema 13. (OBM 2006) Sejam x, y, z números reais não nulos tais que $x + y + z = 0$. Qual é o valor de

$$(x^2y^2z^2)\left(\frac{1}{x^3y^3} + \frac{1}{x^3z^3} + \frac{1}{y^3z^3}\right)?$$

Problema 14. (OBM 2005) Dado que $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{11}$, qual o valor de

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}?$$

Use também estimativas e desigualdades para resolver

Problema 15. Encontre as soluções reais de $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 3/2 = 2(x + y + z)$.

Problema 16. Encontre todos os inteiros estritamente positivos x, y, z, w tais que $x! + y! + z! = w!$

Problema 17. (Irlanda 2002) Suponha que n seja o produto de quatro números primos a, b, c, d distintos dois a dois tais que:
(i) $a + c = d$
(ii) $a(a + b + c + d) = c(d - b)$
(iii) $1 + bc + d = bd$
Determine n.

Problema 18. (Asian-Pacific 2011) Sejam a, b e c inteiros positivos. Prove que é impossível que os três números $a^2 + b + c$, $b^2 + c + a$ e $c^2 + a + b$ sejam quadrados perfeitos.

Problema 19. (Moscou 55) Encontre todas as soluções reais de $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$.

Problema 20. (Arábia Saudita 2015) Encontre as soluções inteiras de $x^2y^5 - 2^x5^y = 2015 + 4xy$.

Problema 21. (Norte da China 2013) Dado um número real x denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro n tal que $n \leq x$. Exemplos: $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2,5 \rfloor = 2$ e $\lfloor -2 \rfloor = \lfloor -1,1 \rfloor = -2$. Quais são as soluções não-inteiras da equação

$$x + \frac{13}{x} = \lfloor x \rfloor + \frac{13}{\lfloor x \rfloor}?$$

Problema 22. (Ibero 2018) Para cada inteiro $n \geq 2$, encontre todas as soluções inteiras do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018} \\
x_2 &= (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018} \\
&\vdots \\
x_n &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018}.
\end{aligned}$$

Problema 23. Sejam x e y números reais tais que $(x + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+x^2}) = 1$. Mostre que $x + y = 0$.

Problema 24. (Irlanda 2001) Determine os número reais x não-negativos para os quais

$$\sqrt[3]{13 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{13 - \sqrt{x}}$$

é um número inteiro.

Problema 25. Encontre todas as soluções reais positivas de

$$abc = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

Problema 26. (Vietnam 2015 (Regional)) Encontre as soluções reais do sistema:

$$\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \\ \sqrt{3 - x} + \sqrt{y^2 + 1} = x^3 + x^2 - 4y^2 + 3 \end{cases}$$

Soluções

1. Multiplicando a primeira equação por x e subtraindo ela da segunda obtemos $-y+2=0$. Segue que $y=2$ e substituindo na primeira equação obtemos $x^2-2x-3=0$ que tem como raízes $x=3$ e $x=-1$. As soluções são $(-1,2),(3,2)$.

2. Somando 1 dos dois lados ficamos com

$$(x+1)(y+1)=121,$$

logo $x+1$ (e $y+1$ também!) divide 121. Segue que $(x,y)=(-122,-2)$, $(-12,-12)$, $(-2,-122)$, $(0,120)$, $(10,10)$ e $(120,0)$ são todas as soluções.

3. Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=6(b-a)$. Como $a\neq b$, $a-b\neq 0$, e cancelando dos dois lados ficamos com $a+b=-6$. Por outro lado, somando as duas equações ficamos com $a^2+b^2=6(a+b)+10ab$. Somando $2ab$ dos dois lados e fatorando obtemos $(a+b)^2=6(a+b)+12ab$. Substituindo nossa resposta anterior vem que $ab=6$.

4. Racionalizando, ou seja, multiplicando por $\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{y}}+\sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{y}}$, obtemos

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{y}}+\sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{y}}=\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)=\sqrt{y}.$$

Elevando ao quadrado e somando com o quadrado da equação no enunciado temos:

$$1+y=2\left(x+\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)+2\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)=4x,$$

logo $y\equiv -1 \mod 4$. A única opção correspondente é a letra **C)**.

5. Observe que a equação só faz sentido quando $0\leq x\leq 2012$, logo os 2013 inteiros entre esses dois números tem que ser soluções. Isto nos leva a crer que a relação acima é uma identidade. Em verdade, um número tão grande de soluções já poderia nos levar a crer isso neste caso. Racionalizando os termos da equação obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}=\frac{\sqrt{1006}-\sqrt{x}}{1006-x},\ \frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{2012-x-1006},\ \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}=\frac{2(\sqrt{2012-x}-\sqrt{x})}{2012-x-x}.$$

Dessa forma, a equação original equivale a

$$\frac{\sqrt{1006}-\sqrt{x}}{1006-x}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{2012-x-1006}=\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{x}}{1006-x}=\frac{2(\sqrt{2012-x}-\sqrt{x})}{2012-x-x},$$

que é claramente uma identidade, e concluímos que todo inteiro entre 0 e 2012 é solução.

6. Expandindo, temos

$$\begin{aligned} &abc+c=b^2c+b, \quad abc+a=c^2a+c, \quad abc+b=a^2b+a \iff \\ &bc(a-b)=b-c, \quad ca(b-c)=c-a, \quad ab(c-a)=a-b \end{aligned}$$

e multiplicando as três relações obtemos $a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a) = (b-c)(c-a)(a-b)$. Como os números são distintos dois a dois temos $(abc)^2 = 1 \implies abc = \pm 1$. Resta verificar que há soluções tais que $abc = +1$ e $abc = -1$. Substituindo $abc = 1$ obtemos um sistema equivalente a

$$\begin{cases} c(1-b)(1+b) = b-1 \\ a(1-c)(1+c) = c-1 \\ b(1-a)(1+a) = a-1 \end{cases}$$

e fazendo $a = 1$ é fácil descobrir que $b = -1/2$ e $c = -2$ resolvem o sistema e assim 1 é de fato um valor possível. Para obter -1 como o produto abc basta inverter o sinal da solução anterior.

7. O sistema equivale a:

$$\begin{cases} xz + yz = \frac{1}{z} \\ xy + zx = \frac{1}{x} \\ zy + xy = \frac{1}{y} \end{cases}$$

e somando as equações obtemos $2(xy + yz + zx) = \frac{xy+zy+zx}{xyz}$, donde $xy + yz + zy = 0$ ou $xyz = 1/2$. No primeiro caso, o sistema fica

$$\begin{cases} -xy = \frac{1}{z} \\ -yz = \frac{1}{x} \\ -zx = \frac{1}{y} \end{cases} \iff xyz = -1.$$

Fazendo $z = -\frac{1}{xy}$, as equações originais viram $xy = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$. Note que se x e y satisfizerem essa equação, ao tomarmos $z = -\frac{1}{xy}$, teremos uma solução do sistema original, logo basta encontrar as soluções de $xy = \frac{x+y}{xy}$. Expandindo obtemos a equação do segundo grau $x^2y^2 - x - y = 0$ e, considerando x como um parâmetro, podemos aplicar a fórmula de Bhaskara obtendo $y = \frac{1\pm\sqrt{1+4x^3}}{2x^2}$. Basta então tomar $x \geq \sqrt[3]{1/4}$ e então

$$\left(x, \frac{1+\sqrt{1+4x^3}}{2x^2}, \frac{-2x}{1+\sqrt{1+4x^3}}\right)$$

será solução. Segue que existem infinitas soluções.

8. Multiplicando por 2, temos

$$\begin{aligned} 8x^3 - 6x + 2 = 4y^2 \iff (2x^3) - 3(2x) + 2 = 4y^2 \iff (2x)^3 - 2x - 2(2x) + 2 = 4y^2 \iff \\ (2x)((2x)^2 - 1) - 2(2x-1) = 4y^2 \iff (2x-1)((2x+1)2x - 2) = 4y^2 \iff \\ (2x-1)(4x^2 + 2x - 2) = 4y^2 \iff (2x-1)(4x^2 - 1 + 2x - 1) = 4y^2 \iff \\ (2x-1)(2x-1)(2x+2) = (2y)^2. \end{aligned}$$

Esta fatoração foi obtida separando os termos da equação de forma esperta. Poderíamos também ter fatorado diretamente o polinômio, mas para isso precisaríamos chutar uma de suas raízes, -1 ou $1/2$. A primeira é um chute razoável e daí teríamos $4x^3 - 3x + 1 = (x+1)p(x)$, na qual $p(x)$ é um polinômio do segundo grau e poderíamos usar Bhaskara.[1]

Voltando ao problema, percebemos que sempre que $2x + 2$ for um quadrado perfeito (logo par!) existirá y inteiro positivo que satisfaz a igualdade. Precisamos então que $2x+2 = n^2$ e $x \leq 1980$, logo o problema se resume a encontrar o número de quadrados perfeitos pares menores que $2\cdot 1980 + 2 = 3962$. Usando o número sugerido verificamos que $62^2 < 3962$, e assim cada n par entre 1 e 62 nos dá uma solução (verifique que x será sempre positivo).

[1] $1/2$ pode parecer mais difícil de chutar, mas usando a fórmula para $\cos 3x$ poderíamos deduzir que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ é solução.

9. Escreva $\alpha = \sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27+5\sqrt{33}}$. Temos:

$$\alpha^3 = -54 - 3\alpha\sqrt[3]{-27+5\sqrt{33}}\sqrt[3]{27+5\sqrt{33}} = -54 - 3\alpha(\sqrt[3]{96}).$$

Observando que $96 = 2^5 \cdot 3$ somos incentivados a tomar $\sqrt[3]{2\cdot 3^2}\beta = \sqrt[3]{18}\beta = \alpha$, obtendo:

$$18\beta^3 = -54 - 36\beta \iff 18\beta^3 + 36\beta + 54 = 0$$

e verificamos que -1 é uma solução desta equação.

Dividindo por $(\beta+1)$ obtemos $18\beta^3 + 36\beta + 54 = 18(\beta+1)(\beta^2-\beta+3)$. Note porém que o polinômio $\beta^2 - \beta + 3$ não tem raízes reais (!), pois seu Δ é negativo. Como β é real (já que α o é) e raiz do polinômio acima, segue que $\beta = -1$ e que $\alpha = -\sqrt[3]{18}$.

10. Somando 4 dos dois lados ficamos com

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x-5} + \frac{x}{x-17} + \frac{x}{x-19} = x^2 - 11x$$

O ponto médio dos números 3, 5, 17, 19 é 11. Convém então por simetria escrever $x = y + 11$ e nossa equação vira

$$\frac{y+11}{y+8} + \frac{y+11}{y+6} + \frac{y+11}{y-6} + \frac{y+11}{y-8} = y^2 + 11y \iff 2\frac{y^2+11y}{y^2-64} + 2\frac{y^2+11y}{y^2-36} = y^2 + 11y$$

donde $y = 0, -11$ são soluções, pois zeram $y^2 + 11y$. Assim temos $x = 0$ e $x = 11$ como soluções. Excluindo esses valores, fazendo $t = y^2$ e algumas manipulações algébricas, a equação acima equivale a

$$t^2 - 104t + 36\cdot 64 + 200 = 0 \iff t = 52 \pm 10\sqrt{2},$$

donde $x = 11 \pm \sqrt{52 \pm 10\sqrt{2}}$ são as outras soluções.

11. Observe que os fatores do lado esquerdo tem um padrão razoável então talvez consigamos encontrar um bom padrão ao expandirmos este lado de forma esperta. Defina $v = (4z+1)(6z+1) = 24z^2+10z+1$. Por outro lado,

$$(3z+1)(12z+1) = 36z^2 + 15z + 1 = \frac{3}{2}(24z^2 + 10z + 1) - \frac{1}{2},$$

e assim nossa equação vira $v(3v-1) = 4 \iff 3v^2 - v - 4 = 0 \iff v = -1$ ou $v = 4/3$.

Se $v = -1$ temos $24z^2 + 10z + 1 = -1 \implies z = \dfrac{5 \pm i\sqrt{23}}{24}$.

Se $v = 4/3$ temos $72z^2 + 30z + 3 = 4 \implies z = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{24}$.

12. A ideia é fazer uma substituição trigonométrica. Observe que quando $a^2 + b^2 = 1$ podemos supor que $a = \cos\theta$ e $b = \operatorname{sen}\theta$ para algum ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Dessa forma, fazemos $\frac{1}{x} = \cos\theta$ e $\frac{1}{4-\sqrt{3}x} = \operatorname{sen}\theta$, e isolando x obtemos:

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{4\operatorname{sen}\theta - 1}{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta} \iff \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

Dividindo por 2 e usando fórmulas de trigonometria podemos simplificar esta equação para:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\cos\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \iff \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \operatorname{sen} 2\theta.$$

Segue que $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{7\pi}{18}$ ou $\dfrac{19\pi}{18}$ $(+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ e para cada uma delas $x = \frac{1}{\cos\theta}$ é solução.

13. Para resolver este exercício convém introduzir uma notação muito útil no cálculo de expressões. Sejam x, y, z três variáveis quaisquer. Defina

$$\sigma_1 = x + y + z, \quad \sigma_2 = xy + yz + zx, \quad \sigma_3 = xyz.$$

Costuma ser útil também considerar $S_n = x^n + y^n + z^n$ para n natural. Assim,

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \implies S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Podemos usar esta expressão para calcular S_3. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 S_2 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) &= x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2, \\
\text{mas } x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 &= xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \\
&= xy(\sigma_1 - z) + yz(\sigma_1 - x) + zx(\sigma_1 - y) \\
&= (xy + yz + zx)\sigma_1 - 3(xyz) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3
\end{aligned}$$

e usando a expressão para S_2 obtemos

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Mas por que fizemos tudo isso? Voltando ao problema, nossa hipótese corresponde a $\sigma_1 = 0$ e a expressão em seu enunciado, após expansão, é igual a $\dfrac{S_3}{xyz}$. Usando nossa nova fórmula ficamos com

$$(x^2y^2z^2)\left(\frac{1}{x^3y^3} + \frac{1}{x^3z^3} + \frac{1}{y^3z^3}\right) = \frac{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3}{\sigma_3}.$$

Como $\sigma_1 = 0$, segue que a expressão desejada é igual a 3.

14. Este é um bom exercício para introduzir somatórios cíclicos. Se $f(x, y, z)$ é uma expressão em x, y e z denotamos

$$\sum_{cyc} f(x, y, z) := f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)$$

Por exemplo, $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$. As manipulações algébricas deste exercício podem ser feitas todas diretamente, mas o uso de expressões como acima pode ser muito útil para escrever equações de forma organizada, facilitando sua compreensão[2].

Antes de começar, seguindo a notação da solução anterior denote

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = ab + bc + ca, \quad \sigma_3 = abc.$$

Expandindo o denominador (essa expressão é um produtório cíclico!), obtemos:

$$\begin{aligned}
(a + b)(b + c)(c + a) =& a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + a^2c + 2abc = \sum_{cyc}(a^2b + ab^2) + 2abc \\
=& \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 + 2\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3.
\end{aligned}$$

Veja a resolução do exercício anterior para a dedução da fórmula utilizada acima.

[2]de forma similar poderíamos definir somatórios simétricos considerando todas as permutações de x, y e z, não apenas aquelas que preservam a **ordem cíclica** das letras. Dessa forma teríamos $\displaystyle\sum_{sym} \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$

Por outro lado a expansão do numerador (outro produtório cíclico!) nos dá:

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c)(c-a) &= abc - ac^2 - a^2b + a^2c - b^2c + bc^2 + ab^2 - abc = \sum_{cyc}(-a^2b + ab^2) \\ &= \sum_{cyc}(a^2b + ab^2) - 2\sum_{cyc}(a^2b) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 - 2\sum_{cyc}(a^2b).\end{aligned}$$

Escrevendo $K = \dfrac{\sum_{cyc}(a^2b) + \sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$, obtemos $1 - 2K = \frac{1}{11} \implies K = \frac{5}{11}$. Por outro lado, a expressão que devemos calcular se escreve como

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a}{a+b} &= \sum_{cyc}\frac{a(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \sum_{cyc}\frac{abc + a^2b + ac^2 + a^2c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{\sum_{cyc} abc + \sum_{cyc}(a^2b) + \sum_{cyc}(ac^2 + a^2c)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{3\sigma_3 + \left(\sum_{cyc} a^2b\right) + \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3},\end{aligned}$$

pois $\sum_{cyc}(ac^2 + a^2c) = \sum_{cyc}(a^2b + ab^2)$. Mas esta última expressão é igual a $1 + K = \frac{16}{11}$, resolvendo o problema. Confira também a solução de Marcelo Matheus Gauy no site da OBM ou na Eureka nº24, página 44.

15.

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 3/2 = 2(x+y+z) \iff$$
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) + \frac{1}{2}(z^2 + y^2 + 1 + 2yz - 2y - 2z) + \frac{1}{2}(x^2 + z^2 + 1 + 2zx - 2z - 2x) = 0 \iff$$
$$\frac{1}{2}(x+y-1)^2 + \frac{1}{2}(y+z-1)^2 + \frac{1}{2}(z+x-1)^2 = 0.$$

Como $a^2 \geq 0$ com igualdade apenas quando $a = 0$, obtemos $x + y = y + z = z + x = 1$ o que implica em $x = y = z = 1/2$.

16. Sem perda de generalidade podemos supor $x \leq y \leq z < w$. Suponha que $z \geq 3$. Nesse caso, $w! \geq (z+1)! = (z+1)z! > 3z! \geq x! + y! + z!$, uma contradição. Logo $x \leq y \leq z \leq 2$. Analisando todas as possibilidades obtemos que $x = y = z = 2$ e $w = 3$ é única solução.

17. Uma observação crucial é que existe apenas um primo par, o número 2. Assim, analisando a paridade da primeira equação temos $a = 2$ ou $c = 2$ (note que $d = a + c \geq 3$ tem que ser primo ímpar). Por outro lado, note que se $c = 2$ o lado esquerdo de (iii) é par e o direito ímpar. Assim $a = 2$. Segue que $d = c + 2$ e substituindo temos o sistema:

$$\begin{cases} 2(b + 2c + 4) = c(c + 2 - b) \\ 1 + bc + c + 2 = b(c+2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2b + 2c + 8 = c^2 - bc \\ c + 3 = 2b \end{cases}$$

e substituindo o valor de b novamente obtemos $6c + 22 = 2c^2 - c^2 - 3c \iff c^2 - 9c - 22 = 0$ que tem como raízes $c = 11$ e $c = -2$. Segue então que $a = 2$, $b = 7$, $c = 11$, $d = 13$ é a única solução e $n = 2002$, o que era previsível, pois a prova foi em 2002.

18. A ideia aqui é que se $x^2 + k$ é um quadrado perfeito com x e k inteiros positivos então $x^2 + k \geq (x+1)^2$, pois é o quadrado de um inteiro e é **maior que** x^2. Mas isto implica em $k \geq 2x+1$. Aplicando a nosso problema, suponha que fosse possível. Segue que:

$$b + c \geq 2a + 1, \quad c + a \geq 2b + 1, \quad c + a \geq 2c + 1$$

e somando todas as desigualdades teríamos $2(a+b+c) \geq 2(a+b+c)+3 \implies 0 \geq 3$, uma contradição.

19. Os números x^4 e y^4 são não-negativos e somam 1, logo $0 \leq x^4, y^4 \leq 1$, o que implica em $0 \leq |x|, |y| \leq 1$. Note porém que se $x < 0$ então $x^3 < 0$ e a primeira equação nos dá $y^3 = 1 - x^3 \implies y^3 > 1$ e daí $y > 1$, uma contradição. Segue que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ analogamente. Por outro lado, se $a \in (0, 1)$ é um número real temos que $a^4 < a^3$. Assim, se $x \neq 0, 1$ (o que implica $y \neq 0, 1$) teríamos $1 = x^4 + y^4 < x^3 + y^3 = 1$, outra contradição. Segue então que $(0, 1)$ e $(1, 0)$ são as únicas soluções do sistema.

20. A primeira observação é que x e y são não-negativos, pois caso contrário o lado esquerdo não seria inteiro. Além disso, se $x = 0$ ou $y = 0$ o lado esquerdo seria negativo e o direito igual a 2015. Logo todas as soluções são dadas por pares de inteiros positivos.

O importante agora é observar que se a é inteiro positivo, então x^a é muito menor que a^x quando x é suficientemente grande e restringir os casos. Um argumento de indução demonstra que se $x \geq 4$ então $x^2 \leq 2^x$ e se $y \geq 5$ então $y^5 \leq 5^y$. Como o lado direito é maior que 2015, é impossível termos $x \geq 4$ e $y \geq 5$ simultaneamente, pois isso faria o lado esquerdo ser negativo. Analisando a paridade obtemos também que x e y tem que ser ímpares. Basta analisar 4 casos.

(i) $x = 1 \implies y^5 - 2 \cdot 5^y = 2015 + 4y$, mas nesse caso o lado esquerdo é sempre menor que 2015.

(ii) $x = 3 \implies 9y^5 - 8 \cdot 5^y = 2015 + 12y$. Nesse caso, se $y \geq 6$ o lado esquerdo é negativo (pode ser provado por indução). Testando os outros dois casos pequenos, verificamos que não há soluções.

(iii) $y = 1 \implies x^2 - 5 \cdot 2^x = 2015 + 4x$, mas nesse caso o lado esquerdo é sempre menor que 2015.

(iv) $y = 3 \implies 243x^2 - 125 \cdot 2^x = 2015 + 12x$. Nesse caso, devemos ter $x^2 > 2015/243 > 9$. Verificamos que $x = 5$ é solução. Se $x \geq 7$ então $2^x > 2x^2$ (prove por indução), e o lado esquerdo é novamente negativo. Logo $(5, 3)$ é a única solução.

21. Escreva $x = n + a$, com $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ e $a \in [0, 1)$. Como estamos interessados em soluções não inteiras, podemos supor que $a \neq 0$. Nossa equação fica:

$$n + a + \frac{13}{n+a} = n + \frac{13}{n} \iff a = \frac{13}{n} - \frac{13}{n+a} \iff n^2 + an = 13 \iff a = \frac{13 - n^2}{n}.$$

Queremos encontrar os valores de $n \in \mathbb{Z}$ tais que $0 < a = \frac{13-n^2}{n} < 1$. Contudo, analisando separadamente n positivo ou negativo, temos:

$$0 < \frac{13 - n^2}{n} \implies 0 < n < \sqrt{13} \text{ ou } n < -\sqrt{13}$$
$$\frac{13 - n^2}{n} < 1 \implies \frac{-1 + \sqrt{53}}{2} < n \text{ ou } \frac{-1 - \sqrt{53}}{2} < n < 0.$$

Como $3 < \frac{-1+\sqrt{53}}{2} < \sqrt{13} < 4$, não há solução com $n > 0$. Porém,

$$-5 < \frac{-1 - \sqrt{53}}{2} < -4 < -\sqrt{13} < -3$$

indica que há exatamente uma solução, exatamente quando $n = -4$, o que implica $a = 3/4$ e $x = \frac{-13}{4}$.

22. O lado direito é sempre não-negativo, logo $x_i \geq 0$. Seja então x_a o menor dos x_i (escolha qualquer um se houver empate). Segue que $x_a \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_a \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_a)^{2018}$, com igualdade se e só se $x_a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_a = 1$ ou 0.

No primeiro caso temos $x_a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_a \geq (n-1)x_a$ implicando que $x_a = 0$ (uma contradição) ou $n = 2$. Segue que nosso sistema é $\begin{cases} x_1 = x_2^{2018} \\ x_2 = x_1^{2018} \end{cases}$ e $x_2 = x_1 = 1$.

Se $x_a = 0$, como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_a = 0$ e $x_i \geq 0$, temos $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$, e esta é claramente uma solução. As soluções são $(1,1)$ para $n = 2$ e $x_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$.

23. Expandindo obtemos $x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} = (1-xy) - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$ e elevando ao quadrado

$$\begin{aligned} x^2 + x^4 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + y^2 + y^4 &= \\ 1 - 2xy + x^2y^2 - 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + (1+x^2)(1+y^2) &\iff \\ x^4 + y^4 = 2 - 2xy - 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + 2x^2y^2 &\iff \\ (x^2 - y^2)^2 = 2(1 - xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}). \end{aligned}$$

O lado esquerdo é ≥ 0. Iremos usar uma ideia de desigualdade, vamos provar que o lado direito é menor ou igual a 0, ou seja, $1 - xy \leq \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$. Como a raiz quadrada é sempre não negativa, basta verificar que $(1-xy)^2 \leq (1+x^2)(1+y^2)$. Contudo, apenas uma rápida manipulação algébrica esta última equivale a $0 \leq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, o que é verdade. Segue então que ambos os lados da equação são zero, donde $x^2 = y^2$. Se $x = -y$ o problema acaba. Caso contrário $x = y$ e resolvendo a equação obtida substituindo esta relação no enunciado, obtemos $x = y = 0$.

24. Seja $\alpha = \sqrt[3]{13 + \sqrt{x}}$ e $\beta = \sqrt[3]{13 - \sqrt{x}}$. A ideia é observar que, se x for grande, α e $-\beta$ estão próximos, logo $\alpha + \beta \approx 0$. Daí $\alpha + \beta$, como função de x, é limitada.

Primeiramente, como $\sqrt{x} \geq 0$ por definição, temos $|\alpha^3| \geq |\beta^3|$ e daí segue que $|\alpha| \geq |\beta|$. Como $\alpha > 0$, temos $\alpha + \beta > 0$ (a igualdade entre os módulos só poderia ocorrer quando $x = 0$, mas nesse caso $\alpha = \beta > 0$). Por outro lado,

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 26 + 3(\sqrt[3]{169 - x})(\alpha + \beta).$$

Segue que

$$3\sqrt[3]{169} \geq 3(\sqrt[3]{169 - x}) = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 26}{\alpha + \beta} = (\alpha + \beta)^2 - \frac{26}{\alpha + \beta}$$

Observe que o lado direito é uma função crescente de $\alpha + \beta$(!). Juntando este fato ao fato que $25 - \frac{26}{25} > 21 > 3\sqrt[3]{169}$, obtemos que $\alpha + \beta < 5$ (independentemente de x!). Como queremos encontrar os valores de x para os quais $\alpha + \beta$ é inteiro, basta analisar os casos $\alpha + \beta = 1, 2, 3, 4$ e isolar x na equação acima, obtendo

$$x = \frac{20188}{27}, 196, \frac{123200}{720}, \frac{29645}{216}$$

como soluções.

25. O lado esquerdo é real e positivo. Por simetria podemos supor que $a \geq b$ e $a \geq c$, logo ao menos dois dos termos no produto do lado direito são positivos: $a + b - c$ e $a + c - b$. Segue que o terceiro também tem que ser. Podemos assim escrever

$$x = (b + c - a), \quad y = (c + a - b), \quad z = (a + b - c)$$

com x, y e z positivos. Observe que

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}$$

e nossa equação se torna

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz \iff x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 = 6xyx.$$

Mas a desigualdade das médias aplicada nos seis termos[3] (todos eles são positivos!) implica que o Lado Esquerdo é maior ou igual ao Lado Direito com igualdade se e somente se todos os termos são iguais, o que implica $x = y = z$. Por outro lado, isto implica que $a = b = c$ e é fácil verificar que estas são as soluções da equação.

26. A primeira equação equivale a

$$y^4 - 2xy^2 + 7y^2 + x^2 - 7x - 8 = 0 \iff (y^2 - x)^2 + 8y^2 - 8x - 8 - (y^2 - x) = 0 \iff$$
$$(y^2 - x)(y^2 - x - 1) + 8y^2 - 8x - 8 = 0 \iff (y^2 - x + 8)(y^2 - x - 1) = 0$$

donde $x = y^2 + 8$ ou $x = y^2 - 1$. Entretanto, a segunda equação só está definida quando $x \leq 3$, logo o primeiro caso não acontece. Substituindo $y^2 = x + 1$ na segunda ficamos com

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + x^2 - 4x - 1 \iff \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \iff$$
$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} - 3 = (x+1)(x^2-4) = (x+2)(x+1)(x-2)$$

O Lado Esquerdo só faz sentido se $-2 \leq x \leq 3$. Além disso, elevando ao quadrado e fazendo manipulações algébricas $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} - 3 \leq 0 \iff \sqrt{6 + x - x^2} \leq 2 \iff x^2 - x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$ ou $x \leq -1$. Por outro lado, analisando o produto do lado direito termo a termo temos:

$$(x+2)(x+1)(x-2) \leq 0 \iff x \leq -2 \text{ ou } -1 \leq x \leq 2,$$

que é quase o complementar da região anterior (só estamos interessados em $-2 \leq x \leq 3$). Segue que basta testar se os valores $x = -2, -1, 2$ são soluções. Por verificação, obtemos que $(-1, 0)$, $(2, -\sqrt{3})$ e $(2, \sqrt{3})$ são as soluções do sistema.

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

[3]poderia ser aplicada também em cada um dos pares $x^2y + xy^2$