Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 1

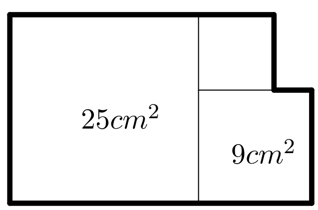
Prof. Bruno Holanda & Emiliano Chagas

Aula 2

Segmentos e Perímetros

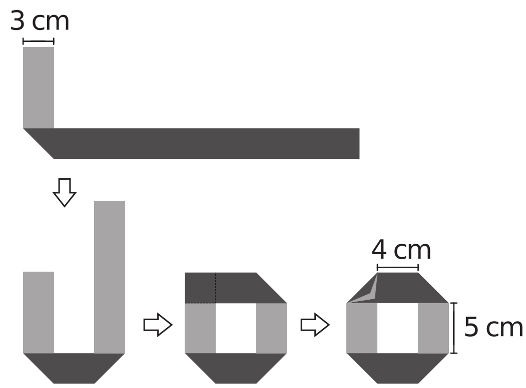
O perímetro de uma figura plana é dado pela medida do contorno dessa figura. Quando a figura trata-se de um polígono, como será o caso dos problemas que serão apresentados a seguir, seu perímetro é dado pela soma dos comprimentos dos seus lados externos. Nosso objetivo com esse capítulo é apresentar uma coleção de problemas (alguns deles bem desafiantes) que abordam os conceitos de perímetros de figuras planas e de soma de segmentos.

Problema 1. (OBMEP 2006) A figura é formada por três quadrados, um deles com área de 25 cm^2 e o outro com área 9 cm^2. Qual é o perímetro da figura?



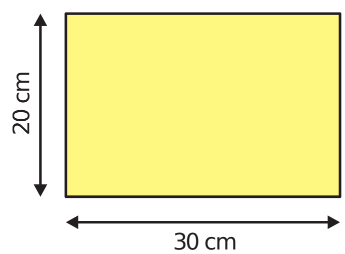
Solução. Um quadrado de lado l tem área l^2. Os lados dos quadrados de áreas 25 cm e 9 cm medem respectivamente, 5 cm e 3 cm. Segue que o lado do quadrado menor mede $5-3=2$ cm. O contorno da figura é formado por 3 lados de 5 cm, 2 lados de 3 cm, 2 lados de 2 cm e um segmento que é a diferença entre um lado de 3 cm e outro de 2 cm, donde o perímetro é $3 \times 5 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + (3-2) = 26$ cm. $\square$

Problema 2. (OBMEP 2015) Júlia dobrou várias vezes uma tira retangular de papel com 3cm de largura, como na figura. Todas as dobras formam um ângulo de 45° com os lados da tira. Qual é o comprimento dessa tira?

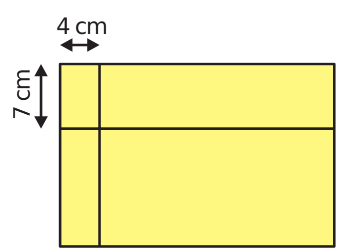


Solução. O perímetro da figura final (em formato de O) é igual a $5+4+5+4+4x = 18+4x$, onde x é a medida dos lados em diagonal que formam os "cantos" da figura. Cada dobra da fita faz a figura "perder" 3cm de comprimento e ganhar x. Portanto, a tira original tem $18 + 4 \times 4 = 18 + 12 = 30$cm de comprimento. □

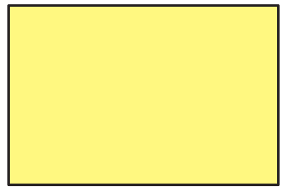
Problema 3. (OBMEP 2015) Lucinha tem três folhas retangulares iguais, cujos lados medem 20 cm e 30 cm.



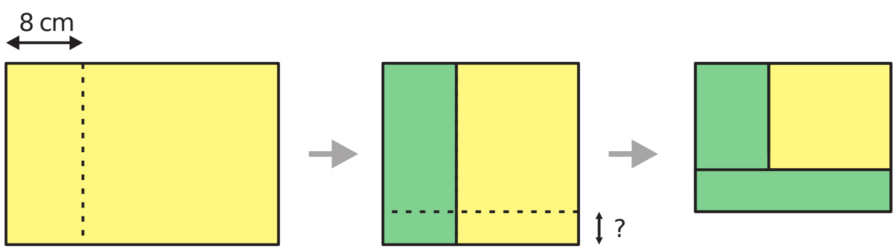
a) Lucinha fez dois traços retos na primeira folha, um a 4 cm da margem esquerda e outro a 7 cm da margem superior, dividindo-a em quatro retângulos. Um desses retângulos tem a maior área. Qual é o valor dessa área?



b) Ajude Lucinha a dividir a segunda folha em quadrados iguais, desenhando traços paralelos às margens, de modo que esses quadrados tenham a maior área possível.



c) Lucinha pegou a terceira folha, amarela na frente e verde no verso, e fez duas dobras: a primeira a 8 cm da margem esquerda e a segunda a uma certa distância da margem inferior, de forma que o perímetro da região não coberta da folha (contorno da região amarela da última figura) fosse de 54 cm. Qual é a distância da segunda dobra à margem inferior?



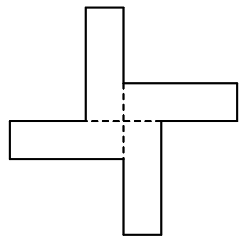
Solução.

a) O maior dos quatro retângulos tem lados de medida $30 - 4 = 26$ cm e $20 - 7 = 13$ cm. Logo, sua área é $26 \times 13 = 338\ cm^2$.

b) Com um traço horizontal e dois verticais geramos os quadrados de maior área possível. Para formar apenas quadrados, o valor do lados desses quadrados deve dividir 20 e 30. A maior área ocorre, então, quando o lado desses quadrados for o máximo divisor comum de 20 e 30, ou seja, 10 cm.

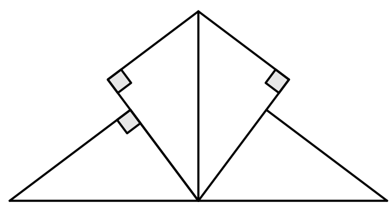
c) Vamos chamar a distância da segunda dobra até a margem inferior da folha de altura da dobra. Como a folha tem 30 cm de largura e a primeira dobra foi feita a 8 cm da margem direita da folha, a largura da região em amarelo da última figura é igual a 30 cm menos duas vezes 8 cm, ou seja, $30 - 16 = 14$ cm. Após a segunda dobra, o dobro da altura do retângulo amarelo será a diferença entre seu perímetro e o dobro de sua largura, ou seja, $54 - 28 = 26$ cm. Portanto, a altura do retângulo amarelo na terceira figura é 13 cm. Assim, da altura da folha original sobraram $20 - 13 = 7$ cm para a realização da segunda dobra e, portanto, a altura da dobra é a metade, ou seja, $7 \div 2 = 3,5$ cm. □

Problema 4. (OBMEP 2005) Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de 3cm de comprimento por 1cm de largura, formando a figura a seguir. Qual é o perímetro da figura?



Solução. Cada retângulo tem perímetro igual a $3+1+3+1=8$cm. Por outro lado, cada retângulo têm um lado de 1cm e parte de um lado de 3cm no interior na figura em formato de cruz. Isso significa que cada retângulo coladora com $8-2=6$cm para o perímetro da figura maior. Portanto, o valor buscado é $4\times 6=24$cm. □

Problema 5. (OBM 2010 - adaptado) Esmeralda tem quatro triângulos retângulos iguais com lados 3cm, 4cm e 5cm. Fazendo coincidir partes dos lados, sem sobrepor triângulos, Esmeralda montou a figura a seguir. Qual é o perímetro dessa figura?



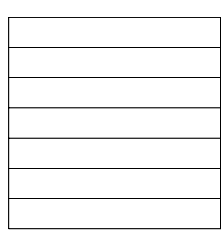
Solução. Cada triângulo tem perímetro igual a $3+4+5=12$cm. Porém, temos duas hipotenusas, dois lados de 3cm e três partes de 3cm internas à figura. Portanto, o perímetro será

$$4\cdot 12-2\cdot(5+3+3)=48-22=26.$$

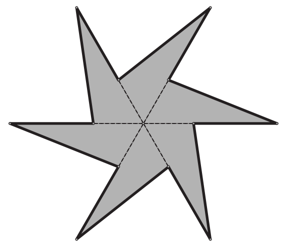
□

Problemas Introdutórios

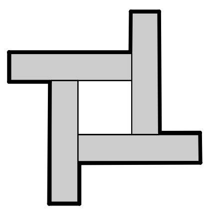
Problema 6. Um quadrado é dividido em sete retângulos como na figura abaixo. Se o perímetro de cada um desses retângulos é $32cm$ Qual o perímetro do quadrado?



Problema 7. (OBMEP 2016) A figura foi construída com triângulos de lados 3cm, 7cm e 8cm. Qual é o perímetro da figura?

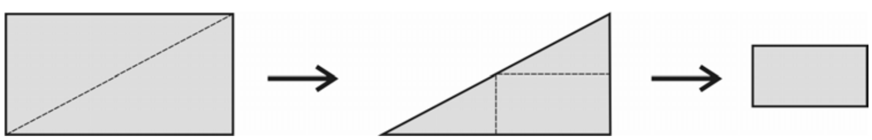


Problema 8. (OBMEP 2014) Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



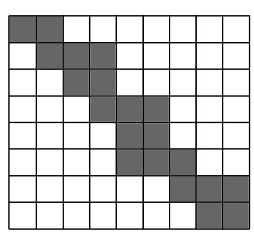
Problema 9. (OBM 2004) Dois quadrados, cada um com área 25 cm^2, são colocados lado a lado para formar um retângulo. Qual é o perímetro do retângulo?

Problema 10. (OBM 2007) Uma folha retangular de cartolina foi cortada ao longo de sua diagonal. Num dos pedaços restantes, na forma de um triângulo retângulo, foram feitos dois cortes, paralelos aos lados menores, pelos meios desses lados. Ao final sobrou um retângulo de perímetro 129 cm. O desenho abaixo indica a seqüência de cortes.



Em centímetros, qual era o perímetro da folha antes do corte?

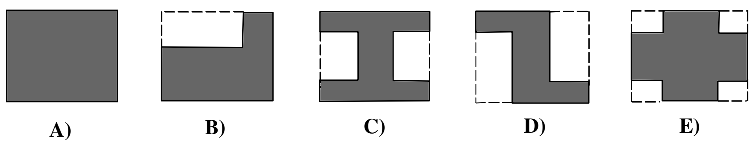
Problema 11. (OBM 2006) No quadriculado a seguir, cada quadradinho tem 1 cm^2 de área.



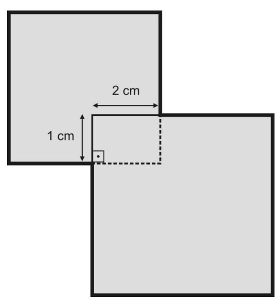
a) Qual é a área e o perímetro da figura formada pelos quadradinhos pintados de cinza?

b) Pintando outros quadradinhos, podemos aumentar a área dessa figura, sem mudar o seu perímetro. Qual é o valor máximo da área que podemos obter dessa maneira?

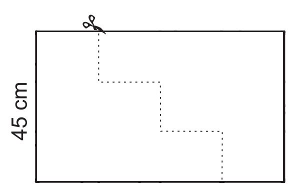
Problema 12. (OBM 2004) Um arquiteto apresenta ao seu cliente cinco plantas diferentes para o projeto de ajardinamento de um terreno retangular, onde as linhas cheias representam a cerca que deve ser construída para proteger as flores. As regiões claras são todas retangulares e o tipo de cerca é o mesmo em todos os casos. Em qual dos projetos o custo da construção da cerca será maior?



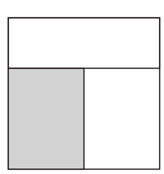
Problema 13. (OBM 2010) O desenho mostra dois quadrados de papel sobrepostos, um de lado 5 cm e outro de lado 6 cm. Qual é o perímetro da figura formada (linha grossa no contorno do desenho), em centímetros?



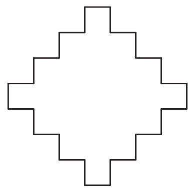
Problema 14. (OBMEP 2007) Um retângulo de papelão com 45 cm de altura é cortado em dois pedaços, como na figura. Com esses dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?



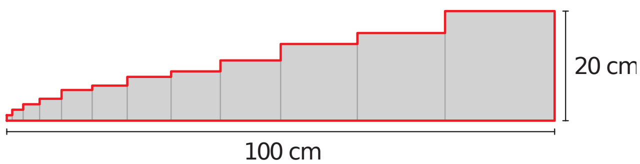
Problema 15. (OBMEP 2009) A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo sombreado?



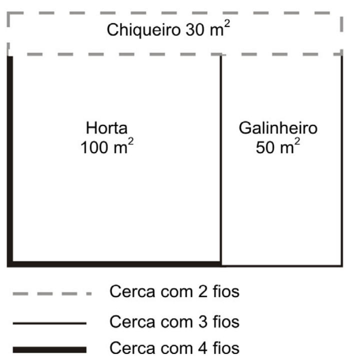
Problema 16. (OBMEP 2013) A figura representa um polígono em que todos os lados são horizontais ou verticais e têm o mesmo comprimento. O perímetro desse polígono é 56 cm. Qual é sua área?



Problema 17. (OBMEP 2017) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?



Problema 18. (OBMEP 2007) João Grilo tem um terreno retangular onde há um galinheiro e um chiqueiro retangulares e uma horta quadrada, cujas áreas estão indicadas na figura.



a) Qual é a área do terreno do João Grilo?

b) Quais são as medidas dos lados do galinheiro?

c) João Grilo cercou a horta, o galinheiro e o chiqueiro com cercas feitas com diferentes números de fios de arame, como indicado na figura. Quantos metros de arame ele usou?

Problemas Propostos

Problema 19. (OBM 2013) Um quadrado de área 144 cm^2 pode ser decomposto em seis quadrados de lados inteiros, não todos iguais. Qual é a soma dos perímetros de todos os seis quadrados?

Problema 20. (OBM 2009) Carlinhos tem folhas iguais na forma de triângulos retângulos de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm. Em cada triângulo, o ângulo assinalado opõe-se ao menor lado. Fazendo coincidir lados iguais desses triângulos sobre uma mesa, sem superpor as folhas, ele desenha o contorno de cada figura obtida, como nos exemplos a seguir.

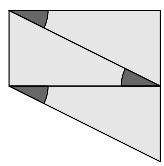


Figura 1

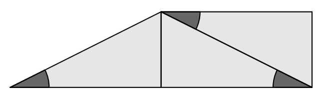


Figura 2

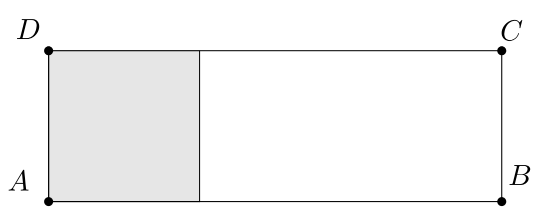
a) Qual é a diferença entre os perímetros das figuras 1 e 2 do exemplo?

b) Com figuras de três triângulos, qual é o maior perímetro que pode ser obtido?

Problema 21. (OBM 2012) Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular, cuja área é 240 cm^2 . Qual é a área do triângulo, em cm^2?

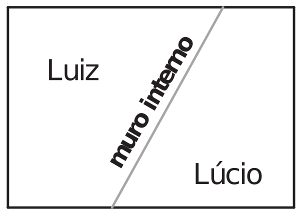
Problema 22. (OBM 2013) Jurema tem 12 peças retangulares de plástico de 3 cm por 4 cm. Ela junta essas peças fazendo coincidir seus lados iguais e monta retângulos maiores, um de cada vez. Um desses retângulos tem o maior perímetro possível. Qual é esse perímetro, em centímetros?

Problema 23. (OBMEP 2008) A região cinza na figura é um quadrado de área 36 cm^2 que corresponde a $\frac{3}{8}$ da área do retângulo $ABCD$. Qual é o perímetro desse retângulo?

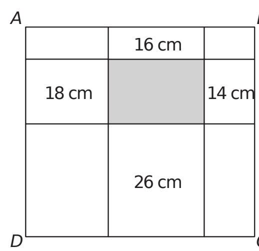


Problema 24. (OBMEP 2011) Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

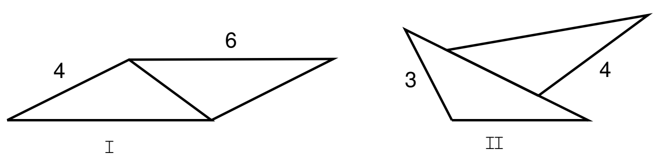
Problema 25. (OBMEP 2014) Os irmãos Luiz e Lúcio compraram um terreno cercado por um muro de 340 metros. Eles construíram um muro interno para dividir o terreno em duas partes. A parte de Luiz ficou cercada por um muro de 260 metros e a de Lúcio, por um muro de 240 metros. Qual é o comprimento do muro interno?



Problema 26. (OBMEP 2016) O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo $ABCD$ é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?



Problema 27. (OBMEP 2006) Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo vemos duas das figuras que ele fez.

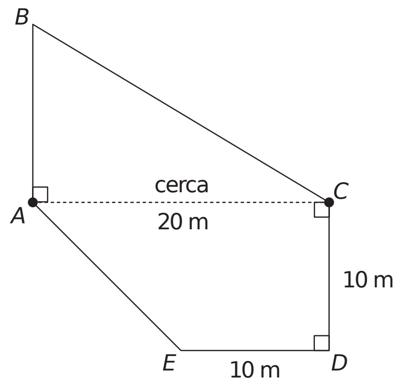


a) Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?

b) Calcule os perímetros das figuras I e II.

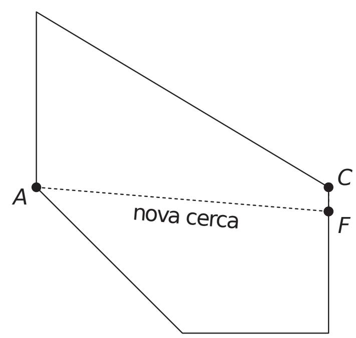
c) Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

Problema 28. (OBMEP 2008) A figura ao lado representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento AC. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2.

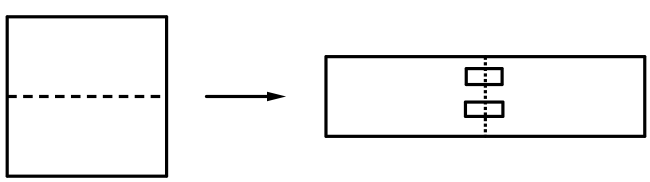


a) Qual é a área total do terreno?

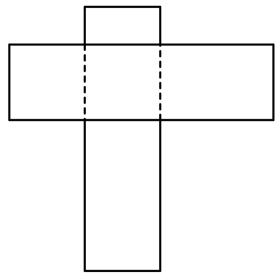
b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento AF na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância CF?



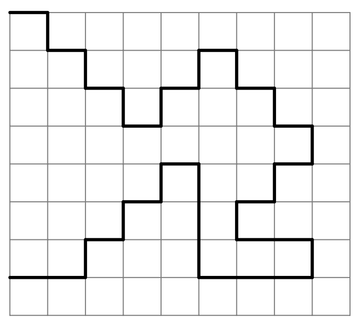
Problema 29. (OBM 2014) Janaína cortou uma folha quadrada ao meio e colou com adesivos as duas metades, fazendo coincidir seus lados menores, obtendo uma folha retangular. Qual é a razão entre o perímetro do quadrado original e o perímetro do retângulo?



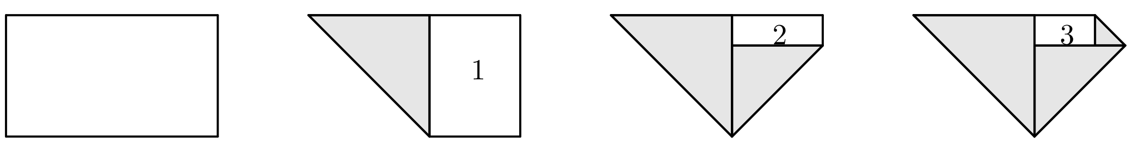
Problema 30. (OBM 2006) São dadas duas tiras retangulares de papel com 20cm de comprimento, uma com 5cm de largura e outra com 11cm de largura. Uma delas foi colada sobre a outra, perpendicularmente, de modo a formar a figura ilustrada abaixo. Qual é o perímetro dessa figura, em centímetros?



Problema 31. (OBM 2012) Juliana cortou a folha quadriculada, representada abaixo, ao longo da linha mais grossa. Ela obteve dois pedaços com diferentes perímetros. Qual é a diferença entre esses perḿetros?

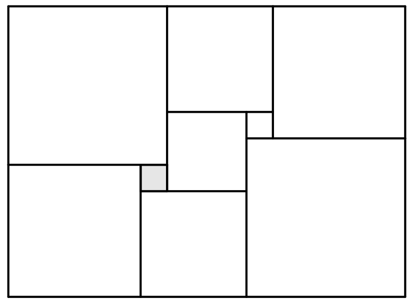


Problema 32. (Maio 2002) Uma folha de papel retângular (branca de um lado e cinza do outro) foi dobrada três vezes, como mostra a figura abaixo:

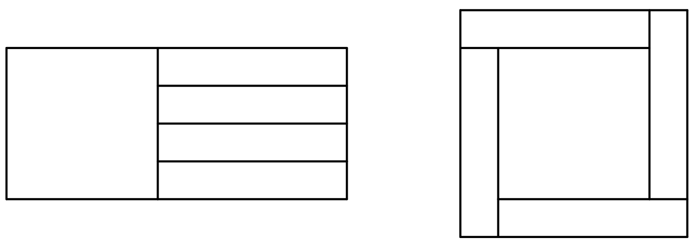


O retângulo 1, que ficou da cor branca após a primeira dobra, tem 20cm a mais de perímetro que o retângulo 2, que ficou branco após a segunda dobra, e este por sua vez tem 16cm a mais de perímetro que o retângulo 3, que ficou branco após a terceira dobra. Determine o perímetro da folha branca.

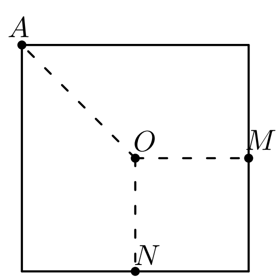
Problema 33. Na figura a seguir, temos um retângulo dividido em vários quadrados menores. Sabendo que o quadrado cinza tem lado igual a 1cm, qual é o perímetro do retângulo maior?



Problema 34. (OBM 2017 - adaptado) Manoela tem cinco pedaços de papel: um quadrado e quatro retângulos iguais. Utilizando os cinco pedaços ela primeiro monta um retângulo de perímetro 780cm e, em seguida, desmonta o retângulo e usa os cinco pedaços para montar um quadrado conforme mostrado na figura. Qual é o perímetro deste quadrado?



Problema 35. (OBM 2015) No quadrado abaixo, de perímetro 48cm, M e N são pontos médios dos lados, O é o centro e A um vértice. Lena cortou o quadrado ao longo das linhas tracejadas e, usando os três pedaços, montou um retângulo com a mesma área do quadrado original, porém com um perímetro diferente. Qual é o valor desse perímetro?

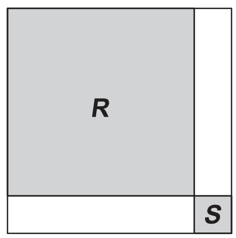


Problema 36. (OBMEP 2010) A Professora Clotilde desenhou três figuras no quadro-negro, todas com área igual a 108 cm^2.

a) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a 12 cm. Qual é o perímetro desse retângulo?

b) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado cinza de área igual a 36 cm^2, como na figura. Qual é o perímetro do retângulo branco?

c) A terceira figura é um quadrado que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados cinza R e S, como na figura. O perímetro de um dos retângulos é igual a três vezes o perímetro do quadrado S. Qual é a área do quadrado R?



Problema 37. (OBMEP 2010) Marcelo cortou um quadrado de 6 cm de lado em duas partes, como na figura 1. O corte foi feito em formato de escada, com segmentos de 1 cm paralelos aos lados do quadrado.

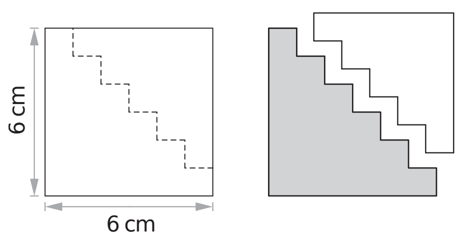


Figura 1

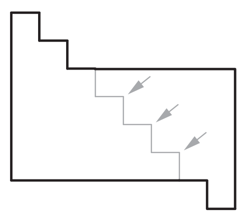


Figura 2

a) Calcule o perímetro e a área da parte cinza na figura 1.

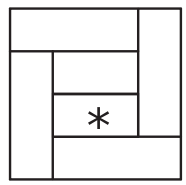
b) A figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente três degraus (indicados com flechas) de uma das partes na outra parte. Calcule o perímetro e a área dessa figura.

c) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de 87 cm de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Encontre o perímetro dessa nova figura.

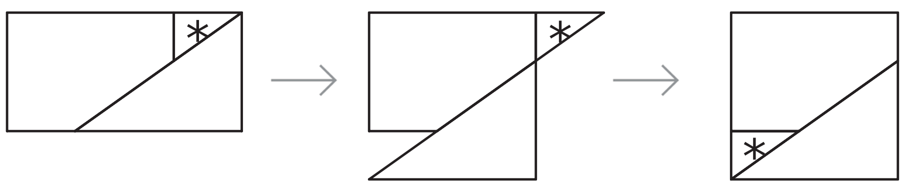
Problema 38. (OBMEP 2011) Sara recortou três tiras retangulares diferentes de papel.

a) Ela recortou a primeira tira em três retângulos iguais, como na figura abaixo. Com esses retângulos, formou um quadrado de 36 cm^2 de área. Encontre as medidas dos lados dos retângulos que ela recortou.

b) Ela recortou a segunda tira em seis retângulos de mesma largura e com eles formou um quadrado de 36 cm^2 de área, como na figura. Encontre o perímetro e a área do retângulo indicado com $*$.



c) As medidas da terceira tira eram $4,5$ cm e 2 cm. Sara recortou essa tira em três pedaços e com eles formou um quadrado, como na figura. Qual é a área do triângulo indicado com $*$?



Dicas e Soluções

6. Seja x a medida do menor lado de um dos retângulos. Como o lado vertical do quadrado é formado por sete destes retângulos, o lado do quadrado será $7x$. Portanto, pela figura, podemos concluir que o outro lado do retângulo será $7x$. Assim, como o perímetro do retângulo é 32, temos que

$$x + 7x + x + 7x = 32 \Rightarrow 16x = 32 \Rightarrow x = 2.$$

   Com isso, o perímetro do quadrado será $4 \cdot 7x = 56$.

7. Observe que a figura é composta por seis triângulos, cada um tem perímetro igual a $3 + 7 + 8 = 18$. Porém, todos os lados de medida 3 são internos na figura e não contam para o perímetro da figura estrelar. Além disso, em cada triângulo, o maior lado está parcialmente no inteiror. De fato, cada ponta da estrela é formado por dois lados, um de medida 7 e outro de medida $8 - 3 = 5$. Assim, o perímetro da estrela é igual a $6 \cdot (5 + 7) = 72$cm.

8. Cada retângulo tem perímetro igual a $10 + 45 + 10 + 45 = 110$cm. Porém, deste perímetro temos $10 + 20 + 10 = 40$ no interior da figura. Portanto, cada retângulo colabora com $110 - 40 = 70$cm para o perímetro da figura. Como temos quatro retângulos, o perímetro é $4 \times 70 = 280$cm.

9. (OBM 2004) O lado de cada quadrado mede 5 cm. Ao juntar os dois quadrados, cada quadrado vai perder um lado e no total teremos 6 medidas de lado, ou seja, o perímetro do retângulo formado é $6 \times 5 = 30$cm.

10. (OBM 2007) O retângulo que sobra após os cortes tem lados iguais às metades dos lados da cartolina original, cujo perímetro, então, é o dobro do perímetro desse retângulo. Logo, o perímetro da cartolina antes do corte é $129 \times 2 = 258$ cm.

11. (OBM 2006) Como cada quadradinho tem 1 cm^2 de área, o lado de cada um mede 1 cm.

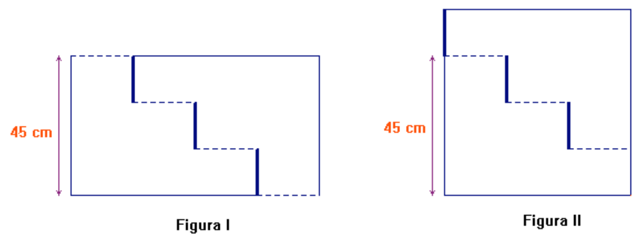
    a) Há 20 quadradinhos pintados de cinza. Logo a área da figura formada é 20×1 $cm^2 = 20$ cm^2 e como há 8 segmentos verticais à esquerda e 8 à direita além de 9 segmentos horizontais pela parte de cima e 9 pela debaixo, o perímetro, que é a soma das medidas de todos os lados, é $2 \times 8 + 2 \times 9 = 16 + 18 = 34$ cm.

    b) O quadriculado inteiro é um retângulo de lados 8 cm e 9 cm, e portanto de perímetro $2 \times 8 + 2 \times 9 = 16 + 18 = 34$ cm. Deste modo, o valor máximo da área que podemos obter é quando a figura for igual a todo o quadriculado e, assim, a área será $8 \times 9 = 72$ cm^2.

12. (OBM 2004) Alternativa C - Nas figuras, basta ver se nos retângulos menores a linha tracejada é metade do perímetro. Isto não ocorre na figura onde a linha tracejada é menor que a metade.

13. (OBM 2010) Para calcular o perímetro da figura, conte o perímetro dos dois quadrados, que é igual a $4 \times 5 + 4 \times 6 = 44$ cm e desconte o perímetro do retângulo formado pela sobreposição das áreas, que é $2 \times 1 + 2 \times 2 = 6$ cm Essa diferença é 38 cm.

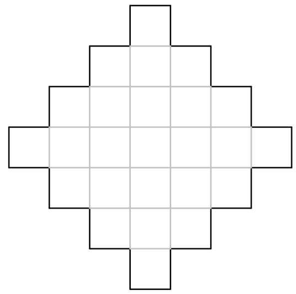
14. (OBMEP 2007) Na figura I mostramos o retângulo antes de ser cortado e, na figura II, o modo como as peças se encaixam para formar o quadrado.



O encaixe mostra que os segmentos pontilhados são todos iguais, assim como os segmentos em traço mais grosso. Observando a figura I, vemos então que $3\times$(comprimento de um segmento em traço grosso) $= 45$ cm, donde o comprimento de um desses segmentos é $45 \div 3 = 15$ cm. Da figura II temos lado do quadrado $= 45+$ comprimento do segmento em traço grosso $= 60$ cm. Por outro lado, ainda observando a figura II, vemos que $3\times$ (comprimento de um segmento pontilhado) $= 60$ cm, donde o comprimento de um desses segmentos é $60 \div 3 = 20$ cm. Finalmente, voltando à figura I, temos $4\times$ (comprimento de um segmento em traço pontilhado) = base do retângulo, e segue que a base do retângulo mede $4 \times 20 = 80$ cm.

15. (OBMEP 2009) O quadrado tem lado 12 cm, logo sua área é igual a $12^2 = 144\ cm^2$. Portanto, cada um dos três retângulos tem área igual a $\frac{144}{3} = 48\ cm^2$. Os dois retângulos inferiores são iguais, pois têm a mesma área e a mesma altura. Logo, têm a mesma largura, igual a $\frac{12}{2} = 6$ cm e, dessa forma, sua altura é $\frac{48}{6} = 8$ cm. Assim, o perímetro do retângulo sombreado é $6 + 8 + 6 + 8 = 28$ cm.

16. (OBMEP 2013) O polígono tem 14 lados que são segmentos verticais e 14 que são segmentos horizontais. Seu perímetro é a soma dos comprimentos desses 28 segmentos; logo, o comprimento de cada segmento é $56 \div 28 = 2$ cm. Podemos agora decompor o polígono em 25 quadrados de 2 cm de lado, como na figura a seguir. A área de cada quadrado é $2 \times 2 = 4\ cm^2$ e a do polígono é então $25 \times 4 = 100\ cm^2$.



17. (OBMEP 2017) Para calcular o perímetro da figura, observamos que o contorno é formado por dois segmentos cujas medidas são 100 cm e 20 cm, um conjunto de segmentos horizontais (que estão acima da base de 100 cm) e um conjunto de segmentos verticais (que estão à esquerda do lado do quadrado maior de 20 cm). A soma dos comprimentos dos segmentos horizontais corresponde à soma dos comprimentos dos lados dos quadrados que foram dispostos lado a lado na parte inferior da figura, e essa soma é 100 cm. Por outro lado, a soma dos comprimentos dos segmentos verticais é igual ao comprimento do lado do quadrado maior, isto é, 20 cm. O perímetro é, portanto, $100 + 20 + 100 + 20 = 240$ cm.

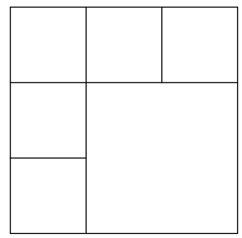
18. (OBMEP 2007)

    a) A área do terreno do João Grilo é igual à soma das áreas da horta, do galinheiro e do chiqueiro, ou seja, é igual a $30 + 100 + 50 = 180\ m^2$.

    b) A área de um quadrado de lado a é a^2 e a área de um retângulo de lados a e b é ab. Como a horta é quadrada e tem 100 m de área, concluímos que cada lado da horta mede 10 m, pois $100 = 10^2$. Assim, o lado comum do galinheiro e da horta mede 10 m. Como a área do galinheiro é igual a 50 m^2, a medida de outro lado é 5 m, pois $10 \times 5 = 50$. Logo as medidas dos lados do galinheiro são 10 m e 5 m.

    c) O chiqueiro tem um lado formado por um lado da horta e um dos lados menores do galinheiro. Logo esse lado mede $10 + 5 = 15$ m; como a área do chiqueiro é 30 m^2, a medida de outro lado é 2 m, pois $15 \times 2 = 30$ m. Observando a planta e a legenda indicando o número de fios de cada um dos lados cercados, concluímos que João Grilo usou $2 \times 4 \times 10 = 80$ m nos lados de traço grosso, $2 \times 3 \times 10 + 1 \times 3 \times 5 = 75$ m nos lados de traço fino e $2 \times 2 \times (2 + 15) = 68$ m nos lados pontilhados, totalizando $80 + 75 + 68 = 223$ metros de arame.

19. (OBM 2013) A divisão buscada é a seguinte.

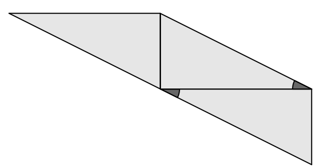


Veja que temos cinco quadrados de lado 4 e um quadrado de lado 8. Logo, a soma dos perímetros é $5 \times 16 + 32 = 112$ cm.

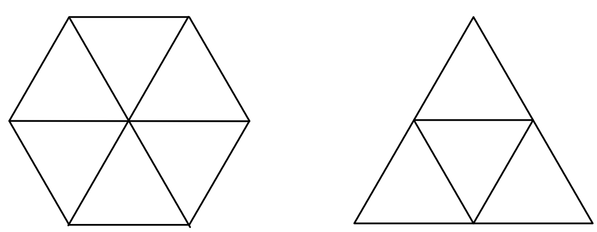
20. (OBM 2009)

    a) O perímetro da primeira figura é $8 + 6 + 6 + 10 + 6 = 36$ e da segunda figura é $10 + 8 + 6 + 8 + 8 = 40$. Portanto a diferença é $40 - 36 = 4$.

    b) A figura de maior perímetro é obtida quando fazemos coincidir os dois menores lados de cada um dos triângulos. Isso é mostrado na figura a seguir cujo perímetro é $10 + 10 + 10 + 8 + 6 = 44$ (há outras com o mesmo perímetro).



21. (OBM 2012) Sendo a e b os lados do triângulo e do hexágono, respectivamente, temos $3a = 6b \Leftrightarrow a = 2b$. O hexágono pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros de lado b e o triângulo equilátero de lado $a = 2b$ pode ser dividido em 4 triângulos equiláteros de lado b.



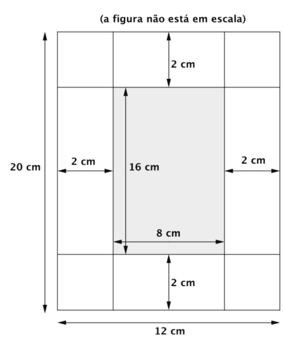
A área do triângulo equilátero de lado a é, então, $\dfrac{4}{6}$ da área do hexágono, ou seja, $\dfrac{2}{3} \times 240 = 160\ cm^2$.

22. (OBM 2013) Sendo x a quantidade de retângulos que enfileiramos com o lado 3 cm e y a quantidade que enfileiramos com o lado 4 cm, então $x \times y = 12$ é o total de

retângulos e o perímetro é $3x + 3x + 4y + 4y = 6x + 8y$. E assim, temos apenas que verificar os seguintes casos:
$x = 1$ e $y = 12 \rightarrow$ perímetro $= 102$
$x = 2$ e $y = 6 \rightarrow$ perímetro $= 60$
$x = 3$ e $y = 4 \rightarrow$ perímetro $= 50$
$x = 4$ e $y = 3 \rightarrow$ perímetro $= 48$
$x = 6$ e $y = 2 \rightarrow$ perímetro $= 52$
$x = 12$ e $y = 1 \rightarrow$ perímetro $= 80$
Vemos, portanto, que o perímetro máximo é 102.

23. (OBMEP 2008) Como a área de um quadrado de lado a é a^2 e o quadrado tem área 36 cm , segue que seu lado mede 6 cm, Temos que:
$\frac{3}{8}$ área $= 36\ cm^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8}$ área $= 36 \div 3 = 12\ cm^2 \Leftrightarrow$ área $= 12 \times 8 = 96\ cm^2$.
Logo, o retângulo tem 96 cm^2 de área e sua largura AD mede 6 cm , portanto $6 \times CD = 96$ e segue que $CD = 96 \div 6 = 16$ cm. Logo o perímetro do retângulo é $2 \times (6 + 16) = 44$ cm.

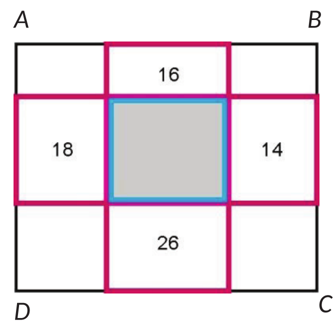
24. (OBMEP 2011) Cortar uma tira de dois centímetros de largura de cada lado da folha faz com que cada lado da folha passe a medir 4 cm a menos. Logo o pedaço de papel que sobrou é um retângulo de dimensões $12 - 4 = 8$ cm e $20 - 4 = 16$ cm, cujo perímetro é $2 \times 8 + 2 \times 16 = 48$ cm.



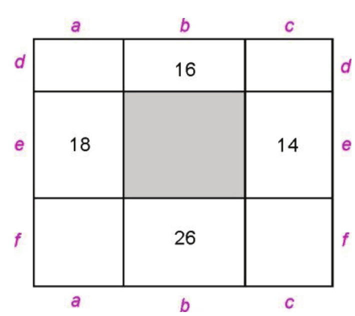
25. (OBMEP 2014) Somando as metragens dos muros de Luiz e de Lúcio, obtemos $240 + 260 = 500$ m. Neste total estão computados o comprimento do muro original (de 340 m) mais duas vezes o comprimento do muro interno. Logo, o comprimento do muro interno é igual a $\dfrac{500 - 340}{2} = 80$ metros.
Podemos também resolver algebricamente: como o muro interno pertence ao cercado dos terrenos de Luiz e de Lúcio, se x é a medida do muro interno, temos: $340 + 2x = 240 + 260$. Portanto $x = 80$ m.

26. (OBMEP 2016) 1ª solução: O perímetro do retângulo maior $ABCD$ é igual ao perímetro da figura em forma de cruz formada pelos cinco retângulos (os que possuem números marcados em seu interior e o retângulo cinza), como mostra a figura

a seguir. O perímetro dessa figura é igual a soma da medida de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as de cada de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza. A soma das medidas dos de todos os lados desses quatro retângulos externos é $16 + 18 + 26 + 14 = 74$ e o perímetro da figura em formato de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo $ABCD$. Logo, o perímetro do retângulo cinza é $74 - 54 = 20$ cm.



2ª solução: As letras de a até f na figura são as medidas dos lados dos retângulos menores. Calculando o perímetro de cada um dos retângulos menores, temos:
$2b + 2d = 16$
$2a + 2e = 18$
$2c + 2e = 14$
$2b + 2f = 26$
$2b + 2d = ?$
O perímetro do retângulo maior $ABCD$ é $2(a + b + c) + 2(d + e + f) = 2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f = 54$. Somando os perímetros dos quatro retângulos ao redor do retângulo central cujas medidas são dadas, temos:
$2b + 2d + 2a + 2e + 2c + 2e + 2b + 2f = \underbrace{2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f} + 2b + 2e$, onde esses seis termos agrupados representam o perímetro do retângulo maior. Assim, $16 + 18 + 14 + 26 = 54 + 2b + 2e \Leftrightarrow 2b + 2e = 74 - 54 = 20$. Portanto o perímetro do retângulo cinza é 20 cm.



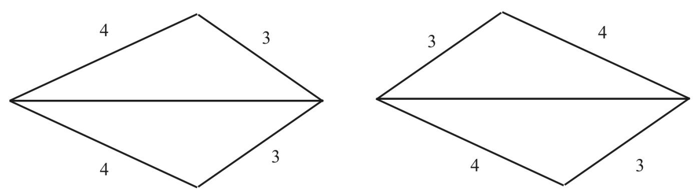
27. (OBMEP 2006)

a) A solução desse item segue diretamente da observação das figuras. Na figura

I vemos que as medidas de dois lados que não foram unidos são 4 cm e 6 cm, e os dois lados que foram unidos são do mesmo tamanho, logo eles não podem medir 4 cm nem 6cm. Portanto os lados que foram unidos sõ podem medir 3 cm. Na figura II, vemos que o maior lado de um dos triângulos (que mede 6 cm) foi unido ao menor lado do outro triângulo (que mede 3 cm). Portanto, os lados unidos medem 6 cm e 3 cm.

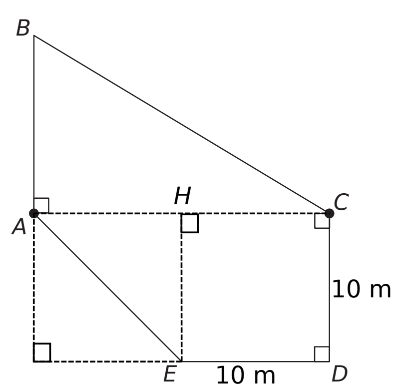
b) A solução segue do item anterior, que fornece as medidas dos lados que não foram unidos. Logo, o perímetro da figura I é $4+6+4+6=20$ cm e o perímetro da figura II é $6+4+3+4+(6-3)=20$ cm. Foi subtraído 3 cm correspondente ao lado do triângulo que foi unido e não conta no perímetro da figura II.

c) Da maneira como Miguilim forma as figuras, ele conseguirá a de menor perímetro quando unir os lados maiores, isto é, os de 6 cm (já que eles não contarão no cálculo do perímetro). Veja a seguir duas figuras que ele pode formar assim. O perímetro de cada uma é $2\times 3+2\times 4=14$ cm.

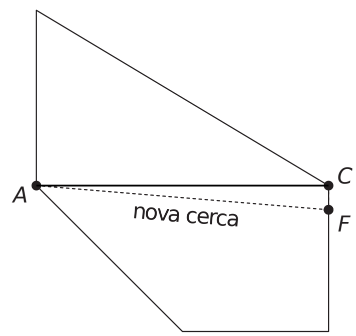


28. (OBMEP 2008)

a) A figura a seguir mostra como decompor a região $ACDE$ em um quadrado $CDEH$ e um triângulo AGE. Como $CD=DE=10$ e $AC=20$, segue que $AG=10$. Logo a área do triângulo AGE é metade da área de um quadrado de lado 10, ou seja, é $\dfrac{AG\times GE}{2}=\dfrac{10\times 10}{2}=50\ m^2$. Como a área do quadrado $CDEH$ é $10^2=100\ m^2$, concluímos que a área da região $ACDE$ é $100+50=150\ m^2$. Alternativamente, podemos calcular a área de $ACDE$ como a diferença entre as áreas do retângulo $ACDG$ e do triângulo AHE, ou seja, $20\times 10-\dfrac{10\times 10}{2}=150\ m^2$.



b) Como o terreno tem 270 m^2, ao dividi-lo em duas partes iguais cada uma das partes terá área de $\frac{270}{2} = 135\ m^2$. Desse modo, devemos ter $135 = [ABCF] = [ABC] + [ACF] = 120 + [ACF]$ e vemos que $[ACF] = 15\ m^2$. Por outro lado, a área do triângulo ACF é $\frac{AC \times CF}{2} = \frac{20 \times CF}{2} = 10 \times CF$. Portanto $10 \times CF = 15$ e logo $CF = 1,5$ m.



29. (OBM 2014) Seja x o lado do quadrado. O retângulo terá perímetro igual $\frac{x}{2} + 2x + \frac{x}{2} + 2x = 5x$. Portanto, a razão é $\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$.

30. (OBM 2006) O primeiro retângulo tem perímetro igual a $20 + 5 + 20 + 5 = 50$ e o segundo tem perímetro igual a $20+11+20+11 = 62$. A soma dos perímetros é igual a $62 + 50 = 112$. Devido a sobreposição, parte desse perímetro não é contado, pois está no interior da figura. A parte que não é contada é equivalente a um retângulo de lados 5 e 11 cujo perímetro é $5+11+5+11 = 32$. Portanto, o perímetro da figura em formato de cruz é igual a $112 - 32 = 80$.

31. (OBM 2012) Veja que a parte em comum entre as duas figuras (dada pelo corte feito por Juliana) desaparecerá quando efetuarmos a subtração. Portando, podemos ignorá-la e achar os perímetros parciais das figuras desconsiderando essa parte comum. Se x é o tamanho do caminho comum, o perímetro da figura da esquerda é igual a $8 + x$. Enquanto que o perímetro da figura da direita é igual a $x + 26$. Portanto, a diferença é igual a $(x + 26) - (x + 8) = 18$.

32. (Maio 2002) Vamos trabalhar de "trás para frente". Sejam x a medida do lado vertical e y a medida do lado horizontal do retângulo 3. Observe que o retângulo 2 tem lados iguais a $x+y$ e x, enquanto que o retângulo 1 tem lados iguais a $x+y$ e $2x+y$. Assim, os perímetros dos retângulos 1, 2 e 3 são iguais a $2(3x + 2y)$, $2(2x + y)$ e $2(x + y)$, respectivamente. Pelo o que foi descrito no enunciado, podemos montar as seguintes equações:

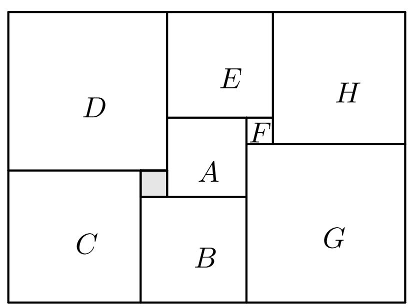
$$\begin{cases} 2(3x + 2y) - 2(2x + y) = 20 \\ 2(2x + y) - 2(x + y) = 16. \end{cases}$$

Que podem ser simplificadas para

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x = 8. \end{cases}$$

Portanto, podemos deduzir que $y = 2$. Agora, veja que a folha tem lados iguais a $2x + y$ e $3x + 2y$. Logo, o perímetro é igual a $2(5x + 3y) = 2(40 + 6) = 92$cm.

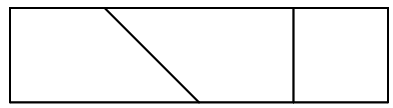
33. Denote por A, B, C, D, E, F, G e H os quadrados que estão no inteirior do retângulo maior. Seja x o tamanho do lado do quadrado A. Dessa forma, os quadrados B, C e D terão lados iguais a $x+1$, $x+2$ e $x+3$ respectivamente. Agora veja que o quadrado E terá lado igual a $(x + 3) - (x - 1) = 4$. Com isso, o quadrado F terá lado $4 - x$. Consequentemente, o quadrado H terá lado igual a $4+(4-x) = 8-x$. Enquanto que o quadrado G terá lado $(8 - x) + (4 - x) = 12 - 2x$. Agora, veja que o lado vertical do retângulo maior pode ser visto tanto como a soma dos lados dos quadrados D e C quanto como a soma dos lados dos quadrados H e G. Assim, podemos montar a seguinte equação:
$$(x + 2) + (x + 3) = (8 - x) + (12 - 2x)$$
$$\Rightarrow 2x + 5 = 20 - 3x \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3.$$
Com isso, podemos calcular as medidas dos lados de todos os quadrados da figura e também dos lados do retângulo maior. O lado horizontal é será igual a 15 e o lado vertical igual a 11. Portanto, o perímetro do retângulo é $11 + 15 + 11 + 15 = 52$cm.



34. (OBM 2017 - adaptado) Sejam x e y as medidas do menor e do maior lado da peça em formato de retângulo. Pela primeira figura, temos que o lado do quadrado deve ser igual a $4x$. Por outro lado, na segunda figura temos que $4x + x = y$, assim $y = 5x$ e o perímetro do retângulo formado pelas cinco peças deve ser igual a $5x + 4x + 5x + 4x + 4x + 4x = 26x = 780$. Logo, $x = 30$. Agora, o lado do quadrado da segunda figura é $y + x = 5x + x = 6x = 180$. Portanto, seu perímetro é igual a $4 \times 180 = 720$cm.

35. (OBM 2015) Em primeiro lugar, veja que o quadrado original tem lado igual a $\frac{48}{4} = 12$ e que o quadrado menor que tem O, M e N como vértices tem lado igual a

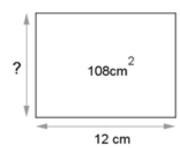
$\frac{12}{2} = 6$. Em segundo lugar, veja que o retângulo montado por Lena é o apresentado a seguir.



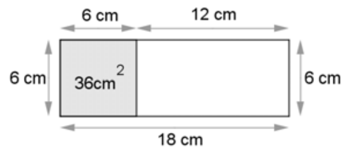
Observe que o lado menor do retângulo é igual ao lado do quadrado menor da figura original, enquanto que o lado maior é igual a quatro vezes o lado do quadrado menor. Portanto, o perímetro desse retângulo é igual a $6 + 24 + 6 + 24 = 60$.

36. (OBMEP 2010)

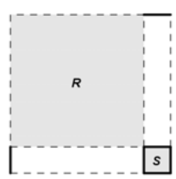
a) Como a área do retângulo é 108 cm^2 e um lado mede 12 cm, o comprimento do lado adjacente, indicado por ? na figura ao lado, deve ser um número que multiplicado por 12 tenha como resultado 108,ou seja, é $108 \div 12 = 9$. Assim, o perímetro do retângulo é $12 + 12 + 9 + 9 = 42$ cm. Algébricamente: seja x o comprimento do lado indicado por ? na figura. Então $12 \times x = 108 \Leftrightarrow x = \dfrac{108}{12} = 9$.

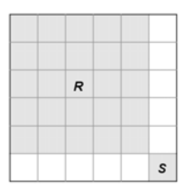


b) Como o quadrado cinza tem área igual a 36 cm^2, o comprimento de seu lado é um número cujo quadrado é 36, ou seja, é igual 6 cm. Logo o retângulo maior tem um lado de comprimento 6 cm; como sua área é 108 cm^2, segue que seu outro lado mede $108 \div 6 = 18$ cm. Logo um lado do retângulo branco mede 6 cm e o outro me de $18 - 6 = 12$ cm, e assim seu perímetro é $12 + 12 + 6 + 6 = 36$ cm. Algébricamente, o lado do quadrado, que mede 6 cm, é um lado do retângulo branco e também do retângulo maior. Seja x o outro lado do retângulo branco; então o outro lado do retângulo maior tem comprimento $x + 6$ cm. Como sua área é 108 cm^2, segue que $6(x + 6) = 108$, ou seja, $6x + 36 = 108$. Logo $6x = 108 - 36 = 72$ e segue que $x = 72 \div 6 = 12$. O cálculo do perímetro do retângulo branco segue como acima.



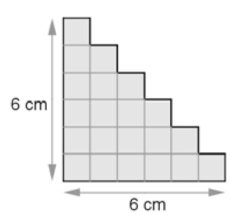
c) Na figura a seguir marcamos os lados do quadrado R em pontilhado e os lados do quadrado S em traço mais grosso. Para simplificar, vamos nos referir ao comprimento de um segmento grosso apenas como *grosso*, e do mesmo modo para *pontilhado*. O perímetro do quadrado S é igual a quatro grossos. Observamos que os retângulos brancos são iguais, pois têm os mesmos lados, e seu perímetro é igual a dois grossos mais dois pontilhados. Por outro lado, o enunciado diz que o perímetro de um desses retângulos é igual a três vezes o perímetro de S, isto é, igual a doze grossos. Logo os dois pontilhados devem ser iguais a dez grossos, ou seja, cada pontilhado é igual a cinco grossos. Notamos agora que um lado do quadrado grande é igual a um grosso mais um pontilhado, ou seja, é igual a seis grossos. Podemos então decompor o quadrado grande em $6 \times 6 = 36$ qua- dradinhos iguais ao quadrado S, como na figura a seguir. Como a área do quadrado maior é igual a 108 cm^2, a área de um desses quadradinhos é igual a $108 \div 36 = 3\ cm^2$. Finalmente, o quadrado R consiste de $5 \times 5 = 25$ quadradinhos e então sua área é igual a $25 \times 3 = 75\ cm^2$. Algébricamente: primeiro argumentamos, como acima, que os retângulos brancos são iguais. Seja agora x o lado do quadrado S (grosso) e y o lado do quadrado R (pontilhado). O perímetro de S é então $4x$ e o de um retângulo branco é $2x + 2y$; o enunciado nos diz que $2x + 2y = 3 \times 4x = 12x$, donde $2y = 10x$ e então $y = 5x$. Logo o lado do quadrado grande mede $x + 5x = 6x$; como sua área é 108 cm^2 temos $108 = 6x \times 6x = 36x^2$, donde $x^2 = 3$. A área de R é então $y^2 = (5x)^2 = 25x^2 = 25 \times 3 = 75\ cm^2$.



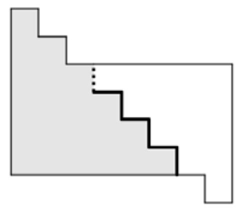


37. (OBMEP 2010)

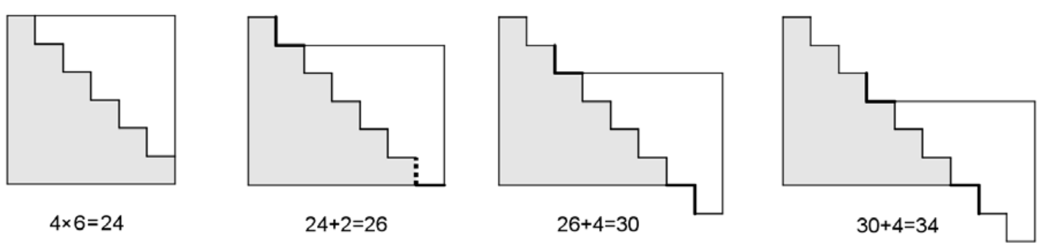
a) A seguir vemos que a figura cinzenta tem como contorno um segmento horizontal de 6 cm, um segmento vertical de 6 cm, seis segmentos horizontais de 1 cm e seis segmentos verticais de 1 cm; logo seu perímetro é $6+6+6\times1+6\times1 = 4\times6 = 24$ cm. Vemos também que ela pode ser decomposta em $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ quadradinhos de área 1; logo sua área é 21 cm^2.



b) A área da figura é a soma das áreas das partes branca e cinzenta. Como essas duas partes formam o quadrado original, sua área total é $6 \times 6 = 36\ cm^2$. Para o perímetro, vamos oferecer duas soluções distintas, observando que ele também pode ser calculado diretamente por observação da figura.



1ª solução: o perímetro da parte cinza é $4 \times 6 = 24$ cm e o da parte branca é $4 \times 5 = 20$ cm; separadamente, essas peças teriam um perímetro total de $20 + 24 = 44$ cm. Ao encaixar as peças como no enunciado, elas passam a ter em comum dois segmentos em cada degrau encaixado, que indicamos com traço mais grosso, e um segmento indicado em pontilhado; o número de segmentos comuns é então $2 \times 3 + 1 = 7$. Para cada segmento comum perdemos 2 cm do perímetro total, num total de $2 \times 7 = 14$ cm. Logo o perímetro da figura é $44 - 14 = 30$ cm.
2ª solução: vamos considerar a seqüência de figuras abaixo.



4×6=24 24+2=26 26+4=30 30+4=34

O perímetro do quadrado original é $4 \times 6 = 24$ cm. Na segunda figura, descemos um degrau, ganhamos os segmentos em traço mais grosso e perdemos o segmento pontilhado. Assim, o perímetro aumentou de $3 - 1 = 2$ cm e passou a ser $24 + 2 = 26$ cm. Após isso, ao descer um degrau sempre ganhamos os quatro segmentos em traço mais grosso, ou seja, o perímetro aumenta 4 cm a cada degrau descido depois do primeiro; em particular, a terceira figura tem perímetro 30 cm, que é a resposta correta a esse item. Observamos também que ao descer o primeiro degrau o número de degraus encaixados continua o mesmo e, após isso, diminui de um a cada degrau descido. Nossas observações podem ser resumidas na tabela abaixo:

degraus descidos	degraus encaixados	perímetro	aumento no perímetro
0	4	24	
1	4	26	2
2	3	30	4
3	2	34	4

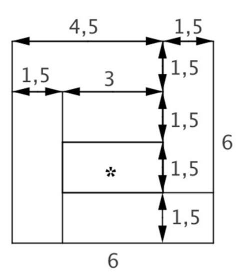
A observação dessa tabela nos mostra que, se o número de degraus descidos for maior que 0, temos degraus encaixados + degraus descidos = 5. Perímetro $= 22 + 4\times$ (número de degraus descidos).

c) 1ª solução: quando o comprimento do lado é 87 cm, a parte cinza tem perímetro igual a $4 \times 87 = 348$ cm e a parte branca tem perímetro $4 \times 86 = 344$ cm, num total de $348 + 344 = 692$ cm. O mesmo raciocínio da 1ª solução do item anterior mostra que o perímetro da figura obtida encaixando 39 degraus é então $692 - 2 \times (2 \times 39 + 1) = 534$ cm.
2ª solução: de acordo com a 2ª solução do item anterior, temos degraus encaixados + degraus descidos = 86 e perímetro $= 346 + 4\times$ (número de degraus descidos). Como o número de degraus encaixados é 39, o número de degraus descidos é $86 - 39 = 47$ e o perímetro da figura é $346 + 4 \times 47 = 534$ cm.

38. (OBMEP 2011)

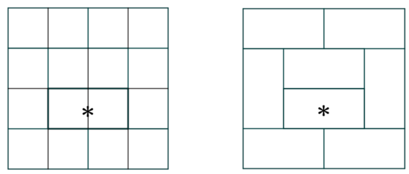
a) Como o quadrado formado com os três retângulos recortados da primeira tira tem área 36 cm^2, seu lado mede 6cm. Logo o comprimento dos retângulos é 6 cm e sua largura é um terço de seu comprimento, ou seja, 2 cm.

b) 1ª solução: como no item anterior, o lado do quadrado formado com os seis retângulos recortados da segunda tira mede 6 cm. Como todos os retângulos tem a mesma largura, a figura mostra que essa largura é um quarto da medida do lado, isto é, $1,5$ cm. As medidas dos outros retângulos são então determinadas imediatamente, como indicado. Em particular, as dimensões do retângulo destacado são 3 cm e $1,5$ cm; logo seu perímetro é $1,5 + 1,5 + 3 + 3 = 9$ cm e sua área é $1,5 \times 3 = 4,5$ cm^2.



2ª solução: O quadrado pode ser decomposto em 16 quadradinhos de lado igual à largura da fita, como na figura à direita. Como o lado do quadrado mede 6 cm, o lado de cada quadradinho mede $1,5$ cm. Logo os lados do retângulo destacado medem $1,5$ cm e 3 cm e, como acima, seu perímetro é 9 cm e sua área é $4,5\ cm^2$. Alternativamente, o quadrado pode ser decomposto em 8 retângulos congruentes ao retângulo destacado, conforme figura. Como a área do quadrado é $36\ cm^2$, a área do retângulo destacado é $36 \div 8 = 4,5\ cm^2$.

c) Na figura abaixo mostramos o retângulo e o quadrado, com pontos correspondentes indicados com a mesma letra; por exemplo, o segmento AB à esquerda corresponde ao segmento $A'B'$ à direita. A área do retângulo é $2 \times 4,5 = 9\ cm^2$, que é também a área do quadrado; logo o lado do quadrado mede 3 cm.



Desse modo, os segmentos $A'B'$ e $B'F'$ medem 3 cm e assim AB mede 3 cm. Como o lado do retângulo mede $4,5$ cm, segue que BC mede $4,5-3=1,5$ cm, que é então a medida de $B'C'$. Finalmente, a medida de $A'B$ é a mesma que a de AD, que é 2 cm; logo a medida de $B'C'$ é $3-2=1$ cm. Assim, obtemos as medidas $BG=1$ cm e $BC=1,5$ cm dos catetos do triângulo retângulo BCG, cuja área é então $\frac{1}{2} \times 1 \times 1,5 = 0,75\ cm^2$.