Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 1

Prof. Bruno Holanda & Emiliano Chagas

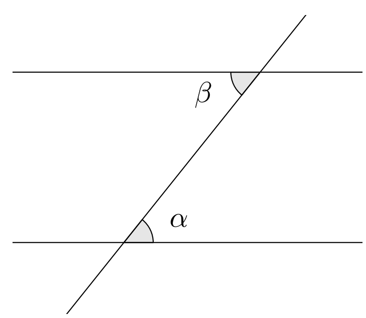
Aula 4

Ângulos

Iremos começar este capítulo enunciando uma das versões do *quinto Postulado de Euclides*. Ou seja, é um fato que deve ser tomado como verdadeiro sem necessidade de prova.

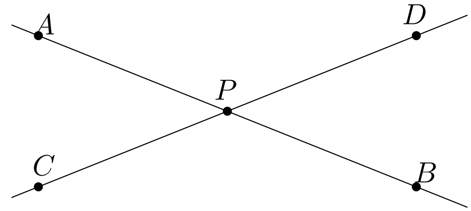
Quinto Postulado. Sejam duas retas r e s que são cortadas por uma terceira. As retas r e s são paralelas se e somente se os ângulos marcados na figura (que são chamados de *alternos internos*) são iguais. Ou seja,

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$



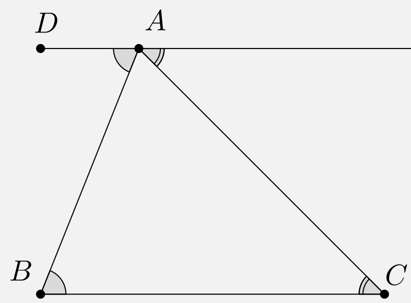
Agora vamos mostrar um conjunto de fatos importantes sobre ângulos que serão utilizados durante todo o livro.

Ângulos opostos pelo vértice. Considere duas retas, a primeira que passa pelos pontos A e B, a segunda que passa pelos pontos C e D que encontram-se no ponto P. Então, $\angle APC = \angle BPD$.



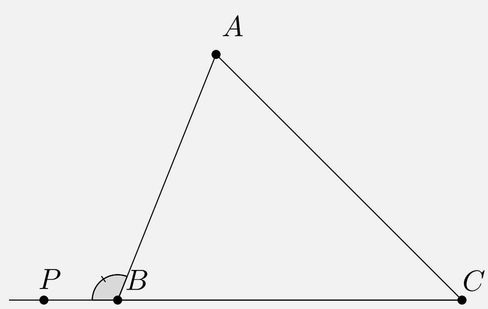
Soma dos ângulos de um triângulo. Em um triângulo ABC, a soma dos ângulos internos é igual a $180°$. Ou seja:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°.$$



Demonstração. Considere uma reta ℓ paralela ao lado BC que passa pelo ponto A. Sejam ainda D e E dois pontos sobre essa reta. Pelo quinto postulado, temos que $\angle ABC = \angle DAB$ e que $\angle ACB = \angle EAC$. Como o ângulo $\angle DAE$ é raso, segue o resultado.

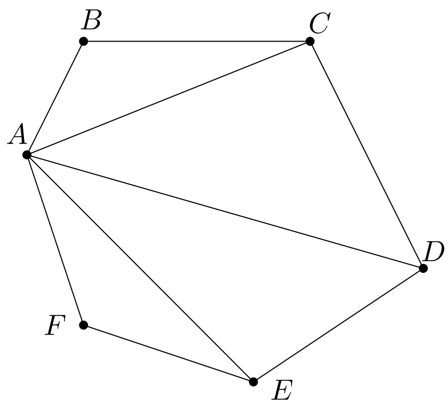
Ângulo externo. Em um triângulo, o ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos opostos.



Demonstração. Veja que $\angle ABP = 180° - \angle ABC$. Por outro lado, a soma dos ângulos internos do triângulo é $180°$. Assim, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$. Substituindo o valor de $180°$ na primeira equação, temos que

$$\angle ABP = \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB - \angle ABC = \angle BCA + \angle CAB.$$

Soma dos ângulos de um polígono.



Lados	Nome	Lados	Nome
3	Triângulo	8	Octágono
4	Quadrilátero	9	Noneágono
5	Pentágono	10	Decágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	20	Icoságono

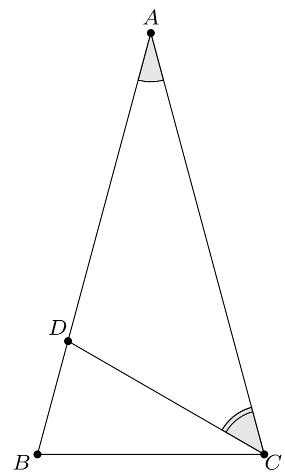
Ao longo do capítulo também utilizaremos um fato que só iremos demonstrar no capítulo sobre congruências de triângulos, mas que é fundamental para resolver diversos problemas de geometria que envolvem ângulos.

> **Fato Importante:** Um triângulo é isósceles se e somente se os ângulos da base são iguais. Ou seja, no ΔABC:
>
> $$AB = AC \Leftrightarrow \angle ABC = \angle ACB.$$

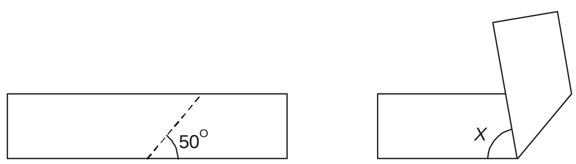
Problemas Introdutórios

Problema 1. (OBMEP 2005 - 1ª fase) Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 12 horas e 30 minutos?

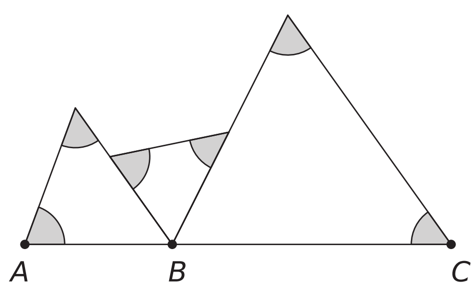
Problema 2. (OBMEP 2005 - 1ª fase) O triângulo ABC é isósceles de base BC e o ângulo $\angle BAC$ mede 30°. O triângulo BCD é isósceles de base BD. Determine a medida do ângulo $\angle DCA$.



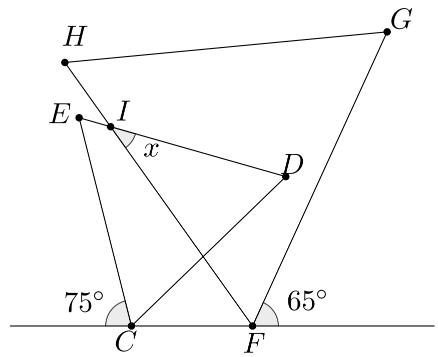
Problema 3. (OBMEP 2006 - 1ª fase) Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana da direita. Qual a medida do ângulo x?



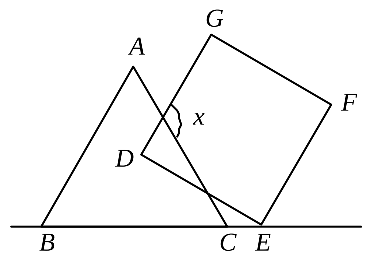
Problema 4. (OBMEP 2014 - 1ª fase) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



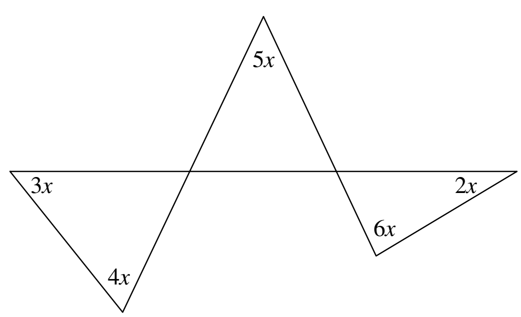
Problema 5. (OBM 2004 - 1ª fase) Na figura a seguir temos dois triângulos equiláteros. Determine o valor de x.



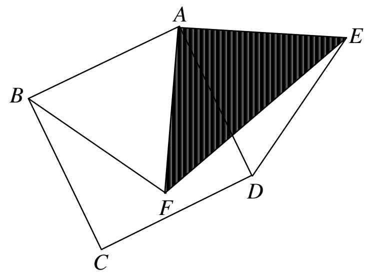
Problema 6. (OBM 2007 - 1ª fase) Na figura, o lado AB do triângulo equilátero ABC é paralelo ao lado DG do quadrado $DEFG$. Qual é o valor do ângulo x?



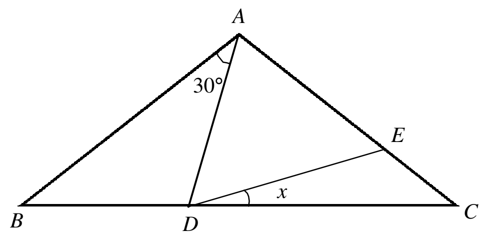
Problema 7. (OBM 2004 - 1ª fase) Na figura, quanto vale x?



Problema 8. (OBM 2004 - 1ª fase) No desenho a seguir, o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado de lado 3 cm e os triângulos ABF e AED são ambos equiláteros. Qual é a área da região destacada?

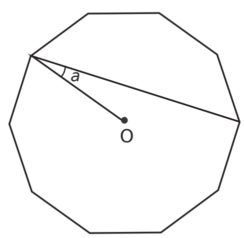


Problema 9. (OBM 2006 - 1ª fase) Na figura, $AB = AC$, $AE = AD$ e o ângulo $\angle BAD$ mede $30°$. Então o ângulo x mede:

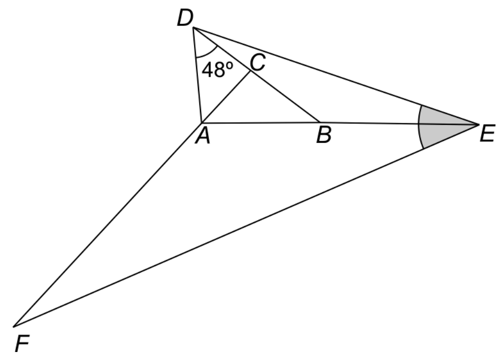


Problemas Propostos

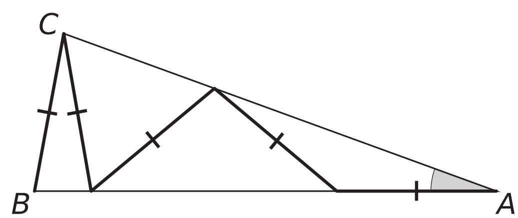
Problema 10. (OBMEP 2007 - 1ª fase) A figura mostra um polígono regular de dez lados com centro O. Qual é a medida do ângulo a?



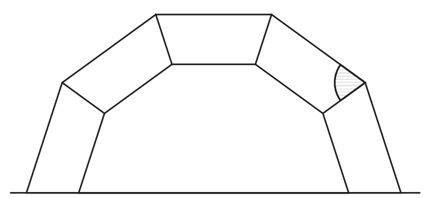
Problema 11. (OBMEP 2008 - 1ª fase) Na figura o ângulo $\angle ADC$ mede $48°$ e os triângulos ACD, DBE e EAF são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Quanto mede o ângulo $\angle DEF$?



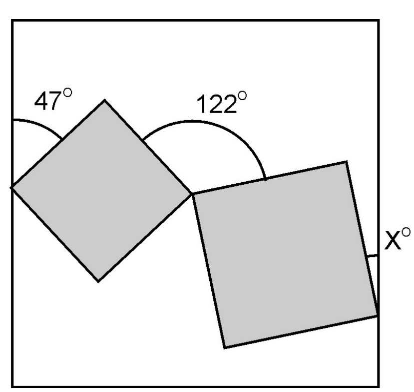
Problema 12. (OBMEP 2009 - 1ª fase) No triângulo ABC temos $AB = AC$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $\angle BAC$?



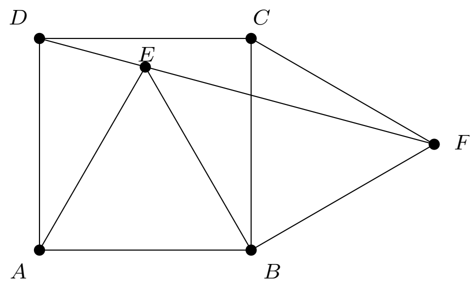
Problema 13. (OBMEP 2009 - 1ª fase) A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?



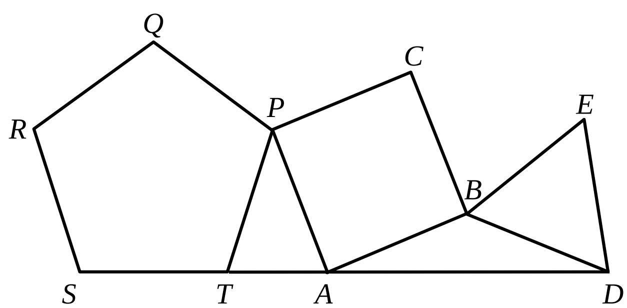
Problema 14. (OBM 2016 - 2ª fase) Na figura, os quadrados cinzentos têm um vértice comum e o quadrado maior tem um vértice de cada um desses quadrados em seus lados. As medidas de alguns ângulos, em graus, estão indicadas na figura. Qual é o valor de X?



Problema 15. Construímos dois triângulos equiláteros ABE interno e BFC externo ao quadrado $ABCD$. Prove que os pontos D, E e F se localizam na mesma reta.

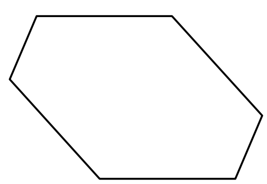


Problema 16. (OBM 2007 - 2ª fase) Na figura abaixo temos um pentágono regular, um quadrado e um triângulo equilátero, todos com a mesma medida de lado.

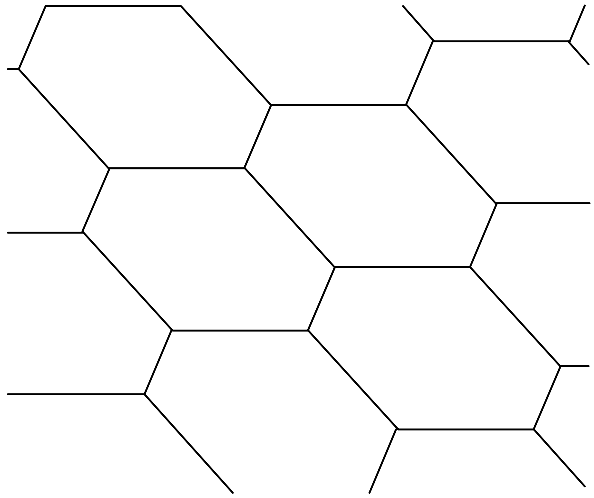


Determine a medida, em graus, do ângulo $\angle QCE$.

Problema 17. (OBM 2008 - 3ª fase) Considere o seguinte hexágono:



Com cópias desse polígono podemos cobrir todo o plano, sem sobreposições, como mostra a figura a seguir.

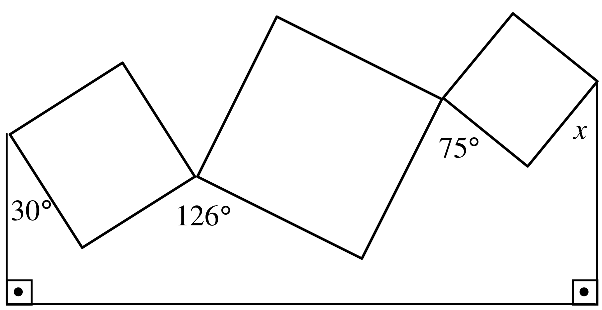


a) É possível cobrir o plano com cópias de um pentágono regular?

Observação: um polígono é regular quando todos os seus lados são de mesma medida e todos os seus ângulos internos são iguais.

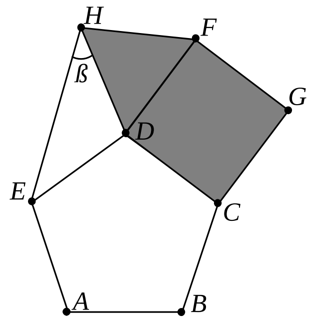
b) Seja $ABCDE$ um pentágono com todos os lados iguais e tal que a medida do ângulo interno nos vértices A e B são $\angle A = 100°$ e $\angle B = 80°$. Mostre como é possível cobrir todo o plano com cópias desse pentágono, sem sobreposições.

Problema 18. (OBM 2006 - 1ª fase) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.

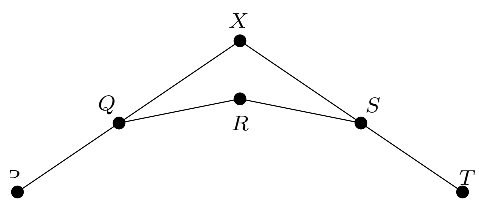


A medida do ângulo x é:

Problema 19. (OBM 2009 - 1ª fase) Na figura a seguir, $ABCDE$ é um pentágono regular, $CDFG$ é um quadrado e DFH é um triângulo equilátero. O valor do ângulo β é:

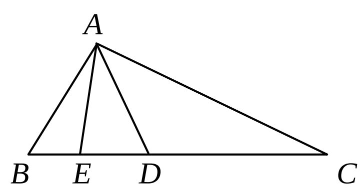


Problema 20. (OBM 2010 - 1ª fase) Os pontos P, Q, R, S e T são vértices de um polígono regular. Os lados PQ e TS são prolongados até se encontrarem em X, como mostra a figura, e $\angle QXS$ mede 140°. Quantos lados o polígono tem?

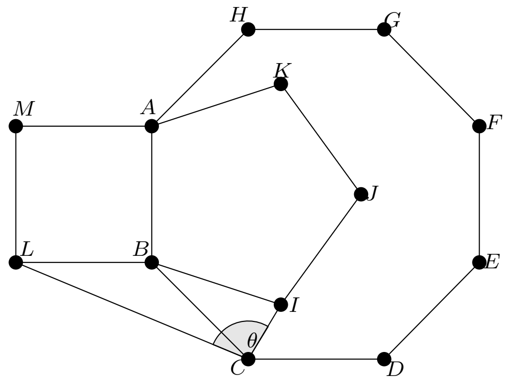


Problema 21. (OBM 2011 - 1ª fase) Em um triângulo ABC com $\angle ABC - \angle BAC = 50°$, a bissetriz do ângulo $\angle ACB$ intersecta o lado AB em D. Seja E o ponto do lado AC tal que $\angle CDE = 90°$. A medida do ângulo $\angle ADE$ é:

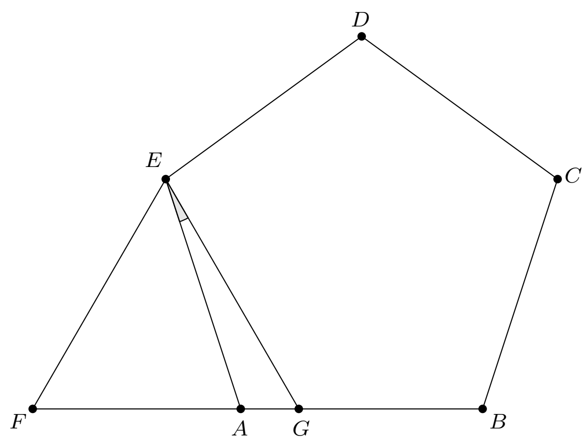
Problema 22. (OBM 2011 - 1ª fase) No triângulo ABC , os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $\angle DAE = 40°$, quanto mede, em graus, o ângulo $\angle BAC$?



Problema 23. (OBM 2016 - 1ª fase) Na figura a seguir sabe-se que $ABCDEFGH$ é um octógono regular, $ABIJK$ é um pentágono regular e $ABLM$ é um quadrado. Determine a medida em graus do ângulo $\angle LCI$ denotado na figura pela letra θ.

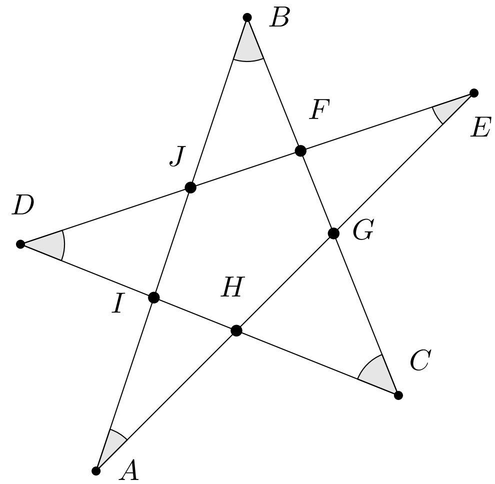


Problema 24. (OBM 2014 - 2ª fase) Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular e EFG é um triângulo equilátero. Determine a medida, em graus, do ângulo $\angle AEG$.



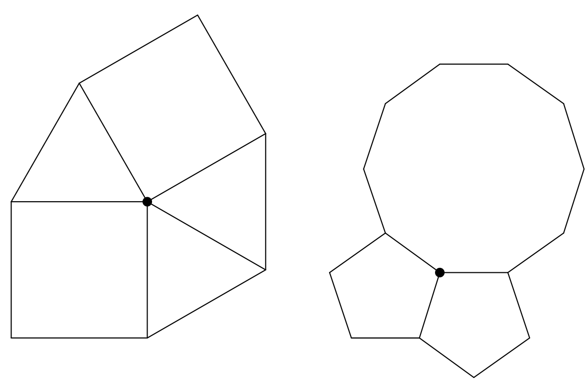
Problema 25. Determine a soma dos cinco ângulos da estrela $ABCDE$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5		
6		
8		



Problema 26. (OBMEP 2007 - 2ª fase)

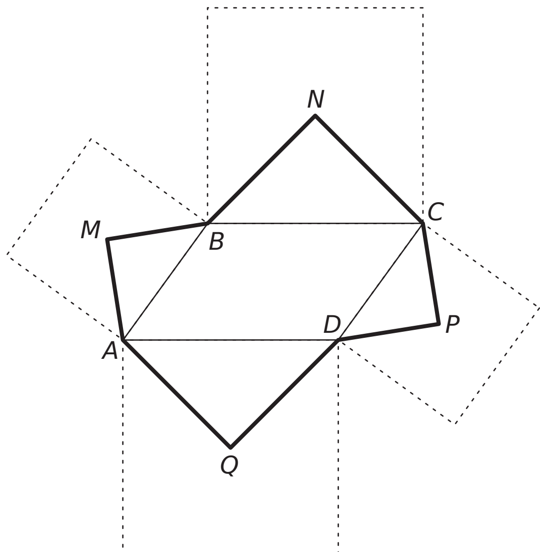
a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos é de um polígono regular de n lados é $(n-2) \times 180°$. Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



b) Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

c) Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

Problema 27. (OBMEP 2008 - 2ª fase) Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo de área 20 cm^2 e lados medindo 4 cm e 6 cm. Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.

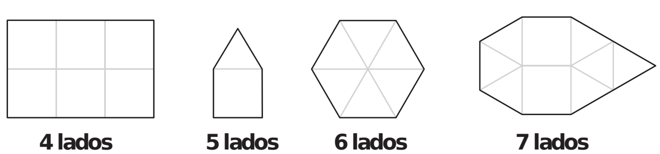


a) Calcule a área do polígono $AMBNCPDQ$.

b) Mostre que os ângulos $\angle MAQ$ e $\angle MBN$ têm a mesma medida.

c) Mostre que $MNPQ$ é um quadrado e calcule sua área.

Problema 28. (OBMEP 2009 - 2ª fase) Um polígono convexo é elegante quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Ao lado, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



a) Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.

b) Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

c) Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.

d) Desenhe um polígono elegante de 12 lados, indicando uma decomposição.

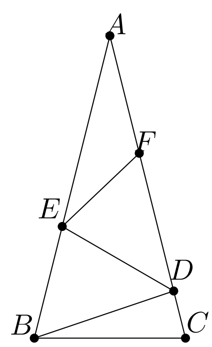
Problema 29. Seja $RSTUV$ pentagono regular. Construa um triangulo eqüilátero PRS com P no interior do pentagono. Ache a medida do ângulo $\angle PTV$.

Problema 30. $DEFG$ é um quadrado no exterior do pentágono regular $ABCDE$. Quanto mede o ângulo $\angle EAF$?

Problema 31. (AHSME 1977) No ABC, $AB = AC$, $\angle A = 80°$. Se os pontos D, E, F estão sobre os lados BC, CA e AB respectivamente, tais que $CE = CD$, $BF = BD$, qual é o valor do $\angle EDF$?

Problema 32. (Torneio das Cidades 1994) No triângulo ABC, retângulo em C, os pontos M e N são escolhidos sobre a hipotenusa de modo que $BN = BC$ e $AM = AC$. Ache a medida do ângulo $\angle NCM$.

Problema 33. O triângulo ABC é isósceles com vértice em A. Determine os ângulos deste triângulo sabendo que $BC = BD = DE = EF = FA$.



Problema 34. No triângulo ABC, $AB = AC$, D está sobre BC e E está sobre AC de modo que $AE = AD$ e $\angle BAD = 30°$. Determine $\angle EDC$.

Problema 35. (Maio 2017) No triângulo ABC marcam-se o ponto D sobre o lado BC e o ponto E sobre o lado AC de modo que $CD = DE = EB = BA$. O ângulo $\angle ACB = 20°$. Calcular a medida do ângulo $\angle ADE$.

Problema 36. (IGO 2017) No triângulo ABC, os pontos D e E estão sobre o lado BC (D mais próximo de B), o ponto F está sobre AC e G está sobre AB. Sabe-se que $EC = EF = FG = GD = DE = GB = AF$. Ache as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

Problema 37. Seja $ABCDEF$ um hexágono com todos os ângulos internos iguais a $120°$. Mostre que

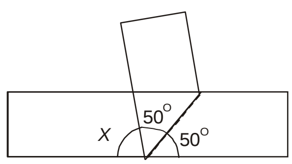
$$AB - DE = CD - FA = EF - BC.$$

Dicas e Soluções

1. (OBMEP 2005 - 1ª fase) Às $12h30$ min o ponteiro dos minutos deu meia volta no relógio a partir do número 12 do mostrador, ou seja, percorreu $360° \div 2 = 180°$. Os números $1, 2, 3, \cdots, 12$ do mostrador do relógio dividem a circunferência em doze ângulos iguais, cada um com $360° \div 12 = 30°$. Logo, a cada hora, o ponteiro das horas (o menor) percorre um ângulo de $30°$; em meia hora este ponteiro percorre então $30° \div 2 = 15°$. Logo, o ângulo formado pelos dois ponteiros é $180° - 15° = 165°$.

2. (OBMEP 2005 - 1ª fase) A soma dos três ângulos internos de um triângulo é $180°$. Como o ângulo $\angle A$ do triângulo ABC mede $30°$, a soma dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ é $180° - 30° = 150°$. Por outro lado, como o triângulo é isósceles de base BC, os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são iguais, logo cada um deles mede $150° \div 2 = 75°$. Como o triângulo BCD é isósceles de base BD, temos $\angle BDC = \angle CBD = 75°$. O mesmo raciocínio usado acima mostra que $\angle DCB = 180° - 2 \times 75° = 30°$. Segue que $\angle DCA = \angle ACB - \angle DCB = 75° - 30° = 45°$.

3. (OBMEP 2006 - 1ª fase) Observando a figura da fita dobrada vemos que $x+50°+50° = 180°$, donde $x = 80°$.

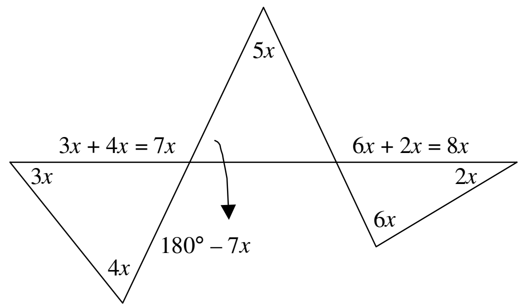


4. (OBMEP 2014 - 1ª fase) A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Observe que os três o ângulos não marcados dos triângulos (com vértices em B) somam $180°$, já que A, B e C estão alinhados. Assim, a soma dos ângulos marcados é $(180° \times 3) - 180° = 360°$.

5. (OBM 2004 - 1ª fase) Seja P o ponto de encontro entre os lados ED e HF. Note que $\angle PCF = 180 - 75 - 60 = 45°$ e que $\angle PFC = 180 - 65 - 60 = 55°$. Como $\angle DPF$ é externo do triângulo PCF, temos que $\angle DPF = 45 + 55 = 100°$. Por outro lado, $\angle DPF$ também é externo do triângulo IPD. Logo,
$$\angle DPF = x + 60° \Rightarrow x = 40°.$$

6. (OBM 2007 - 1ª fase) Como o triângulo ABC é equilátero, o ângulo interno $\angle A$ mede $60°$. Se DG é paralelo a AB, então o ângulo entre DG e AC é $60°$ ou $180° - 60° = 120°$. Sendo x o maior ângulo entre esses dois segmentos, $x = 120°$.

7. (OBM 2004 - 1ª fase)

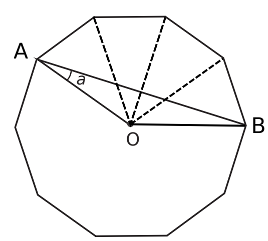


Temos: $8x = 180° - 7x + 5x \Leftrightarrow 10x = 180° \Leftrightarrow x = 18°$.

8. (OBM 2004 - 1ª fase) $AE = AF = AB = 3$ cm , $\angle FAD = 90° - 60° = 30°$, $\angle FAE = 30° + 60° = 90°$. Logo ΔFAE é retângulo em A e tem área $\dfrac{AE \times AF}{2} = \dfrac{3 \times 3}{2} = 4,5$ cm^2.

9. (OBM 2006 - 1ª fase) Pelo teorema do ângulo externo, $\angle ADE + x = 30° + \angle ABD \Leftrightarrow \angle ADE = \angle AED = 30° + \angle ABD - x = x + \angle ACD \Leftrightarrow x = 15°$.

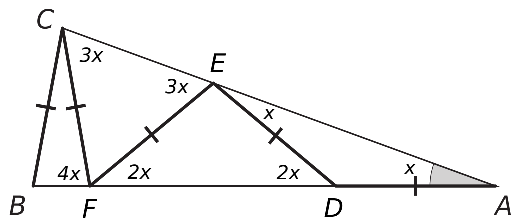
10. (OBMEP 2007 - 1ª fase) O triângulo AOB é isósceles pois os lados OA e OB são iguais. Logo, os ângulos $\angle OAB$ e $\angle OBA$ também são iguais, ou seja, ambos têm medida a . Notamos agora que o ângulo central $\angle AOB$ mede $\dfrac{4}{10} \times 360° = 144°$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale $180°$, segue que $2a + 144 = 180°$. Logo $a = \dfrac{180° - 144°}{2} = \dfrac{36°}{2} = 18°$.



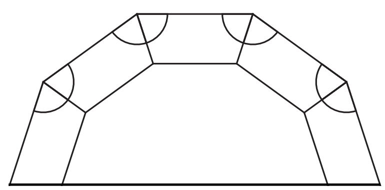
11. (OBMEP 2008 - 1ª fase) Lembramos primeiro que em um triângulo um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Logo $\angle ACB = \angle CAD + \angle CDA = 2 \times \angle CDA = 96°$. Notamos que $\angle CAD = \angle CDA$ pois o triângulo CAD é isósceles. Do mesmo modo obtemos $\angle CBA = 2 \times \angle DEA$ e $\angle BAC = 2 \times \angle FEA$. Somando essas três igualdades e lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, obtemos $180° = 96° + 2 \times (\angle DEA + \angle FEA) = 2 \times \angle DEF \Leftrightarrow \angle DEF = 42°$.

12. (OBMEP 2009 - 1ª fase) Nesta solução vamos usar repetidamente o teorema do ângulo externo. Vamos indicar por x a medida do ângulo $\angle BAC$. Como o triângulo $\angle ADE$ é isósceles, temos $\angle DEA = x$. O ângulo $\angle EDF$ é externo ao triângulo ADE, e pelo

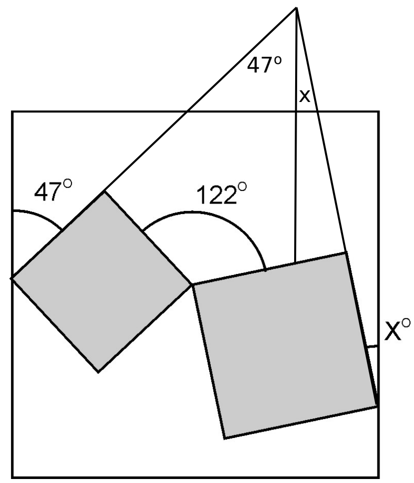
teorema do ângulo externo temos $\angle EDF = x + x = 2x$. Como o triângulo DEF é isósceles temos também $\angle EFD = 2x$; o ângulo $\angle FEC$, externo ao triângulo FEA, mede então $2x + x = 3x$. Analogamente, concluímos que $\angle CBA = 4x$, e como o triângulo ABC é isósceles segue que $\angle BCA = 4x$. Logo $180° = 4x + 4x + x = 9x$, donde $x = 20°$.



13. (OBMEP 2009 - 1ª fase) Lembramos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2) \times 180°$. Podemos ver a figura do enunciado como um polígono de 6 lados (em traço mais grosso na figura ao lado); a soma de seus ângulos internos é então $(6 - 2) \times 180° = 720°$. Por outro lado, como os trapézios são congruentes, a soma destes ângulos internos é igual a 10 vezes a medida do ângulo marcado, que vale então $\dfrac{720°}{10} = 72°$.



14. (OBM 2016 - 2ª fase) Um quadrilátero convexo pode ser dividido em dois triângulos. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$. Na figura, o prolongamento de cada um dos lados dos triângulos internos e dois desses lados formam um quadrilátero cujos ângulos internos medem $90°$, $90°$, $122°$ e $x + 47°$. Para se convencer disso, considere a linha verde vertical traçada a partir do vértice superior do quadrilátero, paralela ao lado do quadrado maior. Veja a figura a seguir.



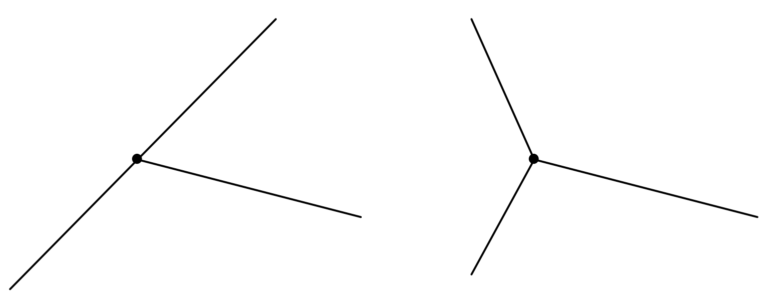
Logo, $90° + 90° + 122° + x + 47° = 360° \Leftrightarrow X = 360° - 349° = 11°$.

15. Nesse problema temos que tomar cuidado para não utilizar que D, E e F são colineares, pois isso é o que queremos provar. Basta mostrar que $\angle DEA + \angle AEB + \angle BEF = 180°$. O ângulo $\angle AEB$ é $60°$ pois o triângulo AEB é equilátero. O triânmgulo DEA é isósceles de base DE, pois $AD = AB = BE$. Por outro lado, o ângulo $\angle DAE$ é $30°$ e portanto podemos concluir que $DEA = ADE = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. O triângulo BEF é retângulo e isósceles. Então $BEF = EFB = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$. Portanto $\angle DEA + \angle AEB + \angle BEF = 75° + 60° + 45° = 180°$, portanto os pontos D, E e F são colineares.

16. (OBM 2007 - 2ª fase) Note que os triângulos PTA , ABD , BCE , e PQC são todos isósceles. Como $\angle STP = 108°$, $\angle PTA = \angle PAT = 72°$. Assim, temos que $\angle TPA = 36°$ e $\angle BAD = \angle BDA = 18°$. Além disso, $\angle ABD = 144°$ e $\angle CBE = 66°$. Como $\angle QPC = 126°$, temos que $\angle QCP = 27°$ e $\angle ECB = 57°$. Logo, $\angle QCE = 174°$.

17. (OBM 2008 - 3ª fase)

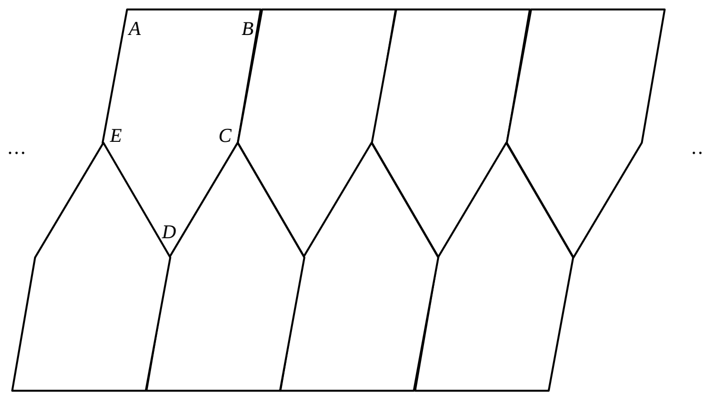
    a) Não é possível. Para que seja possível cobrir o plano com uma figura, em cada vértice determinado pelas figuras que a cobrem a soma dos ângulos internos deve ser $180°$ ou $360°$:



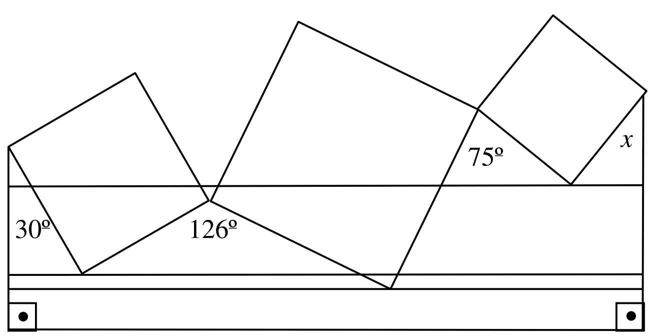
Soma 180º Soma 360º

Todo pentágono pode ser cortado em três triângulos, de modo que a soma de seus ângulos internos é $3 \times 180 = 540$. Assim, cada ângulo interno de um pentágono regular é $\dfrac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Como $108 < 180 < 2 \times 108$ e $3 \times 108 < 360 < 4 \times 108$, não é possível cobrir o plano com cópias de um pentágono regular.

b) Note que, como $\angle A + \angle B = 180$, EA e BC são paralelos, de modo que $EABC$ é um losango. Assim $CE = DE = CD$ e CDE é um triângulo equilátero. Assim é possível cobrir o plano com o pentágono $ABCDE$, como mostra a figura a seguir:



18. (OBM 2006 - 1ª fase) Trace retas horizontais pelos vértices mais baixos dos três quadrados.

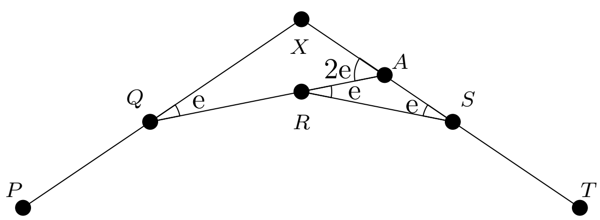


Então os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado da esquerda são 60° e 30°, respectivamente; os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado do meio são respectivamente $180^\circ - 126^\circ - 30^\circ = 24^\circ$ e $90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$; os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado da direita são respectivamente $180^\circ - 75^\circ - 66^\circ = 39^\circ$ e $90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$. Enfim, no triângulo retângulo com um dos ângulos igual a x, temos $x = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$.

19. (OBM 2009 - 1ª fase) As medidas dos ângulos internos de um triângulo equilátero, de um quadrado e de um pentágono regular são, respectivamente, 60°, 90° e $\dfrac{(5-2) \times 180^\circ}{5} =$

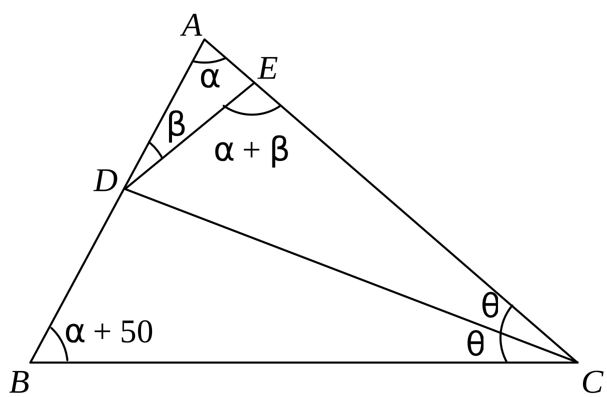
108°. Assim, $\angle HDE = 360° - (60° + 90° + 108°) = 102°$. Temos ainda que o triângulo HDE é isósceles com $HD = DE$ e, portanto, $\beta + \beta + 102° = 180° \Leftrightarrow \beta = 39°$.

20. (OBM 2010 - 1ª fase) Prolongue QR até encontrar o segmento XS. Através da figura, podemos encontrar o valor do ângulo externo do polígono, que deve ser 360° dividido pelo número de lados n.



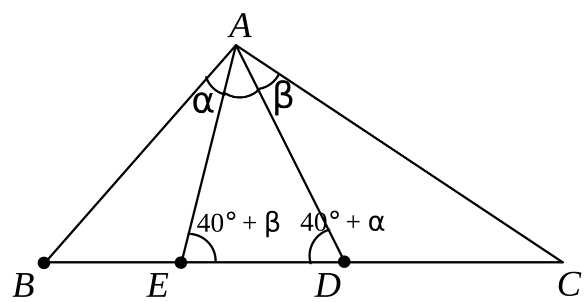
$3e + 140° = 180° \Leftrightarrow 3e = 40° \Leftrightarrow \dfrac{360°}{n} = \dfrac{40°}{n} \Leftrightarrow n = 27.$

21. (OBM 2011 - 1ª fase) Sejam $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ADE$ e $2\theta = \angle BCA$. Temos $\angle ABC = 50° + \alpha$. Pelo teorema do ângulo externo no triângulo BCD, $\alpha + 50° + \theta = 90° + \beta$. Além disso, $2\alpha + 2\theta + 50° = 180°$ pela soma dos ângulos internos do ΔABC. Substituindo o valor de $\alpha + \theta = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$ na primeira equação, obtemos $\beta = 25°$.



22. (OBM 2011 - 1ª fase) Sejam $\alpha = \angle BAE$ e $\beta = \angle DAC$. Como $BD = AB$, $\angle BDA = 40° + \alpha$. Analogamente, $\angle AEC = 40° + \beta$. A soma dos ângulos internos do ΔAED produz $120° + \alpha + \beta = 180° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 60°$. Portanto, $\angle BAC = \alpha + \beta + 40° = 100°$.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°



23. (OBM 2016 - 1ª fase) O ângulo interno de qualquer vértice de um polígono regular de n lados é $\dfrac{180°(n-2)}{n}$. Consequentemente, $\angle ABL = 90°$, $\angle ABI = 108°$ e $\angle ABC = 135°$. Daí, $\angle CBI = 27°$ e $\angle LBC = 360° - 90° - 135° = 135°$. Como $LB = BC = BI$, os triângulos LBC e CBI são isósceles de bases LC e CI. Assim $\theta = \angle LCB + \angle BCI = \dfrac{180° - 135°}{2} + \dfrac{180° - 27°}{2} = 99°$.

24. (OBM 2014 - 2ª fase) O ângulo externo a um vértice de um pentágono regular é 72° enquanto que o ângulo interno de de um triângulo equilátero é 60°. Assim, pelo teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo EAG com respeito ao ângulo externo do vértice A, temos: $x = \angle FAE - \angle EGA = 72° - 60° = 12°$.

25. Observe que $\angle GHC$ é externo do ΔDHE. Logo, $\angle GHC = \angle DEH + \angle EDH$. Da mesma forma, $\angle HGC$ é externo do ΔABG. Logo, $\angle HGC = \angle ABG + \angle BAG$. Assim, a soma dos ângulos da estrela é igual à soma dos ângulos do ΔHGC que é 180°.

26. (OBMEP 2007 - 2ª fase)

    a) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5{,}6$ e 8 na fórmula $(n-2) \times 180°$. Para completar a segunda coluna, basta dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n, ou seja, calcular $\dfrac{(n-2) \times 180°}{n}$; a justificativa para essa expressão é que polígono de n lados tem n ângulos internos iguais, cuja soma é $(n-2) \times 180°$. A tabela completa é dada abaixo.

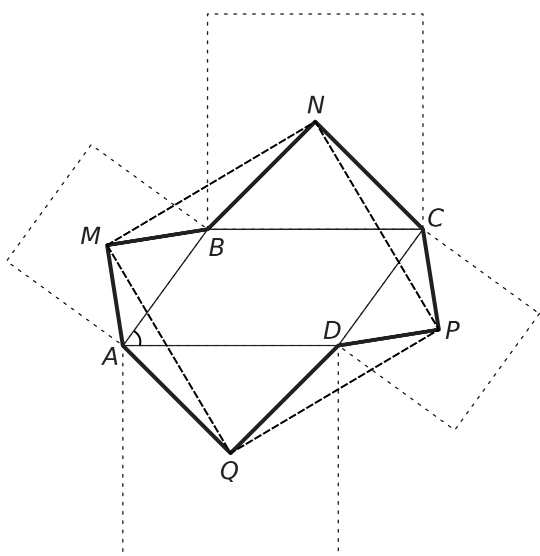
    b) O ângulo interno de um quadrado é 90° e o de um octógono regular é 135°. Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360°. Como $90° + 135° + 135° = 360°$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam.

c) O ângulo interno de um triângulo equilátero é $60°$ e o de um heptágono regular é $\frac{7-2}{7} \times 180° = \frac{5}{7} \times 180°$ Seja n o número de lados do terceiro polígono; o ângulo interno desse polígono é então $\frac{n-2}{2} \times 180°$. Como os três polígonos se encaixam, temos $60° + \frac{5}{7} \times 180° + \frac{n-2}{2} \times 180° = 360° \Leftrightarrow 1 + \frac{5}{7} \times 3 + \frac{n-2}{2} \times 3 = 6 \Leftrightarrow 7n + 15n + 21(n-2) = 42n$, donde $n = 42$.

27. (OBMEP 2008 - 2ª fase)

a) Para calcular a área do polígono $AMBNCPDQ$, basta observar que ele pode ser dividido no paralelogramo $ABCD$ e nos triângulos AMB , BNC , CPD e DQA . Como M , N , P e Q são centros de quadrados, a área de cada um desses triângulos é um quarto da área do quadrado correspondente. Como dois desses quadrados têm área $4^2 = 16$ e os outros dois têm área $6^2 = 36$, a área procurada é é $[ABCD]+$ áreas dos triângulos $= 20 + \frac{1}{4}(16 + 16 + 36 + 36) = 46$ cm^2.

b) Seja α a medida do ângulo $\angle DAB$ Como $ABCD$ é um paralelogramo, segue que $\angle ABC = 180° - \alpha$. Por outro lado, como M , N e Q são centros dos quadrados correspondentes, os ângulos marcados em preto na figura ao lado são todos iguais a $45°$. Logo $\angle MAQ = \angle QAD + \angle DAB + \angle BAM = 45° + \alpha + 45° = \alpha + 90°$ e $\angle MBN = 360° - (\angle ABM + \angle ABC + \angle NBC) = 360° - [45° + (180° - \alpha) + 45°] = \alpha + 90°$, donde $\angle MAQ = \angle MBN$.



c) Como os quadrados sobre AB e CD são iguais, bem como os quadrados sobre BC e AD , e como M , N , P e Q são centros desses quadrados , temos $AM = MB = CP = PD$ e $BN = NC = AQ = QD$. Por outro lado, segue do item anterior que $\angle MAQ = \angle MBN = \angle NCP = \angle PDQ$ donde os triângulos

QAM , MBN , NCP e PDQ são congruentes. Como $MNPQ$ é obtido de $AMBNCPDQ$, retirando-se os triângulos QAM e NCP e adicionando-se os triângulos MBN e PDQ, temos $[MNPQ] = [AMBNCPDQ] = 46\ cm^2$.

A congruência dos triângulos QAM , NBM , NCP e QDP mostra que $QM = MN = NP = PQ$, ou seja, $MNPQ$ é um losango. Para mostrar que $MNPQ$ é um quadrado, basta então mostrar que um de seus ângulos internos é igual a 90°; vamos fazer isso para $\angle QMN$. Como M é o centro do quadrado sobre AB, temos que $\angle AMB = 90°$ por outro lado,da congruência dos triângulos AMQ e MBN tiramos $\angle QMA = \angle BMN$. Logo $\angle QMN = \angle BMN + \angle QMB = \angle QMA + \angle QMB = 90°$ e segue que MNPQ é um quadrado.

Alternativamente, basta mostrar que $QM = NP$ e que $\angle QMN = 90°$, como acima, e finalizar argumentando (por exemplo, por simetria) que a situação é idêntica nos outros vértices.

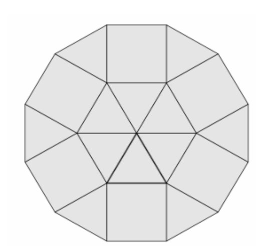
28. (OBMEP 2008 - 2ª fase)

a) Qualquer polígono que cumpra o critério de ser elegante serve.

b) Como um polígono elegante é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados e triângulos equiláteros, seus ângulos são somas de parcelas iguais a 60° ou 90° que não ultrapassem 180°. Os valores possíveis são então 60°, 90°, $120° = 60° + 60°$ e $150° = 60° + 90°$.

c) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é $(n - 2) \times 180°$. Por outro lado, vimos no item anterior que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é 150°; logo,a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de n lados é no máximo $n \times 150°$. Temos então $180(n - 2) \leq 150°n$, e segue que $30n \leq 360$, ou seja, $n \leq 12$.

d) A figura abaixo mostra um polígono elegante de 12 lados.

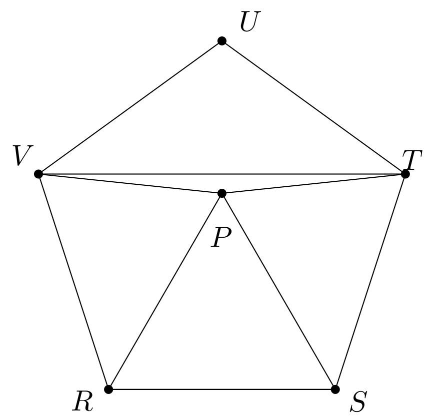


29. A soma dos ângulos de um pentágono qualquer é igual a $3 \times 180° = 540°$. Como o pentágono é regular, todos os seus ângulos devem ser iguais a $\frac{540°}{5} = 108°$. Além disso, os ângulos do triângulo PRS são todos iguais a 60°, pois trata-se de um triângulo equilátero. Por outro lado, todos os lados do pentágono e todos os lados do triângulo PRS são iguais entre si. Com isso, podemos provar que os triângulos PTS e UVT são isóceles. Daí,

(i) ΔPBT isóceles e $\angle PST = 48°$ implicam em $\angle TPS = \angle PTS = \frac{180° - 48°}{2} = 66°$.

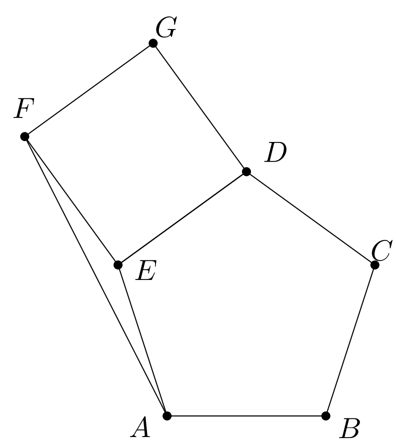
(ii) ΔUVT isóceles e $\angle PST = 108°$ implicam em $\angle TPS = \angle PTS = \frac{180°-108°}{2} = 36°$.

Por fim, $\angle VTP = 108° - 66° - 36° = 6°$.



30. Veja que todos os lados do pentágono e todos os lados do quadrado são iguais entre si, pois possuem um lado em comum (ED) e são ambos polígonos regulares. Portanto, o ΔFEA é isósceles. Já sabemos que o ângulo interno de um pentágo regular é $108°$ e que o ângulo interno do quadrado é $90°$. Note que $\angle FEA = 360° - 108° - 90° = 162°$. Agora, no sendo $\angle EAF = \angle EFA = x$, no ΔFEA, temos:

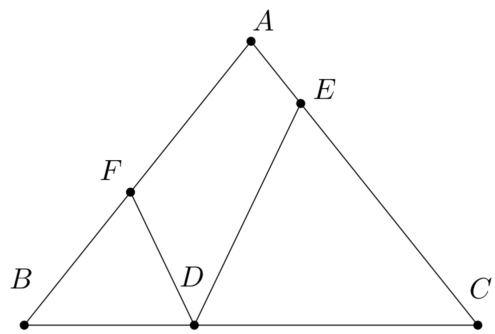
$$2x + 162° = 180° \Rightarrow x = 9°.$$



31. Como ABC é isósceles, $\angle ABC = \angle ACB = 50°$. Além disso, os triângulos BDF e CDE são isósceles. Assim,

$$\angle BDF = \angle BFD = \angle CED = \angle CDE = 65°.$$

Portanto, $\angle EDF = 180° - 2 \times 65° = 50°$.



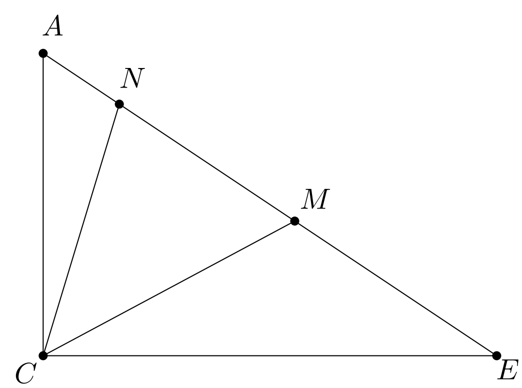
32. Seja $\angle CAB = x$, então $\angle ABC = 90° - x$. Note que os triângulos AMC e ENC são isósceles, assim:

    (i) No triângulo CBN, $\angle CNB = \angle NCE = \frac{180° - (90° - x)}{2} = 45° + \frac{x}{2}$.

    (ii) No triângulo ACM, $\angle AMC = \angle ACM = \frac{180° - x}{2} = 90° - \frac{x}{2}$.

    Para finalizar, CNM a soma dos ângulos 180°, logo:

$$\angle NCM = 180° - \left(90° - \frac{x}{2}\right) + \left(45° + \frac{x}{2}\right) = 45°.$$



33. Seja $\angle BAC = x$. Como AFE é isósceles, $\angle AEF = x$ e $\angle EFD = 2x$, pois é externo ao triângulo AEF. Sendo FED isósceles, $\angle EDF = 2x$. Além disso, $\angle BED = 3x$ (pois é externo ao triângulo AED). Note que $\angle EBD = 3x$, pois BED é isósceles. Usando o ângulo externo no ΔBDA, $\angle BDC = 4x$. Logo, $\angle BCD = 4x$, pois ΔBDC é isósceles e $\angle DBC = x$ pois ABC é isósceles. Somando agora todos os ângulos do ΔABC, temos:

$$x + 4x + 4x = 180° \Rightarrow 9x = 180° \Rightarrow x = 20°.$$

Portanto, os ângulos do triângulo são $20°, 80°, 80°$.

34. Seja $x = \angle DAC$.

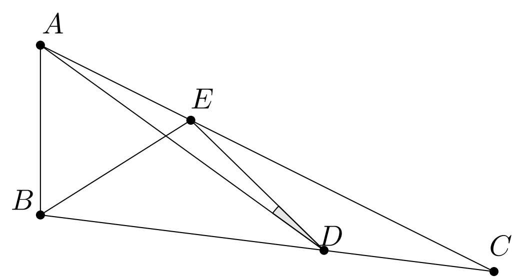
    (i) Como ΔADE é isósceles, $\angle ADE = \angle AED = \frac{180°-x}{2} = 90° - \frac{x}{2}$.

    (ii) Como ΔABC é isósceles, $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180°-(x+30°)}{2} = 75° - \frac{x}{2}$.

    Usando o ângulo externo no triângulo DEC, temos que

$$90° - \frac{x}{2} = \angle EDC + \left(75° - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \angle EDC = 15°.$$

35. Note que ΔDEC é isósceles, logo $\angle DEC = \angle ECD = 20°$. Pelo ângulo externo, $\angle EDB = 40°$. Como EBD também é isósceles, $\angle EBD = 40°$. Observe que $\angle AEB = 60°$, pois é exeterno do ΔEBC. Agora, AEB é isósceles e têm um ângulo de $60°$, logo é equilátero. Dessa forma, $AE = EB = AB$. Por outro lado, pelo enunciado $EB = ED$. Com isso, ΔAED é isósceles. Portanto, $\angle EAD = \angle EDA$. Como $\angle DEC = 20°$ é exeterno do ΔAED, segue que $\angle EDA = 10°$.

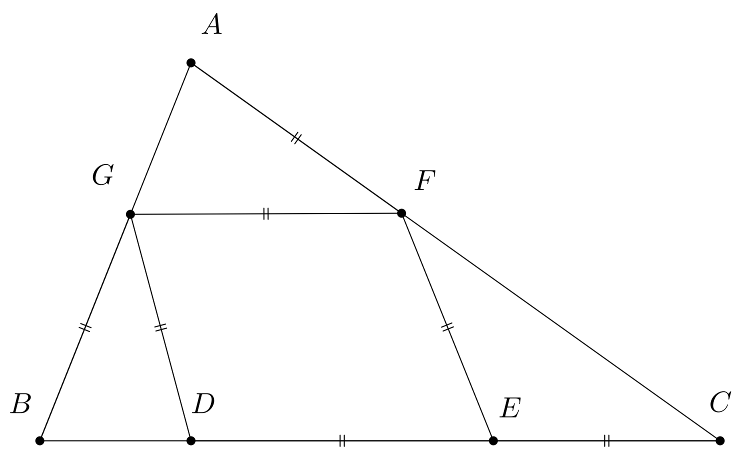


36. Observe que $GFED$ é um losango, pontanto também é um paralelogramo. Além disso, os triângulos FEC, FGA e GBD são isósceles. Se $\angle FCE = x$, então $\angle EFC = x$ e $\angle FED = 2x$ (ângulo externo). Agora, como $GFED$ é um paralelogramo, ele tem os pares de ângulo opostos iguais e ângulos adjacentes somando $180°$. Assim, $\angle GFE = \angle GDE = 180° - 2x$. Logo, $\angle GDB = 2x$ e como ΔGBD é isósceles, $\angle GBD = 2x$. Por outro lado, no vértice F, $\angle AFG = x$. Porém, como FAG também é isósceles, $\angle AGF = \angle GAF = \frac{180°-x}{2} = 90° - \frac{x}{2}$. Por fim, a soma dos ângulos no ΔABC:

$$x + 2x + \left(90 - \frac{x}{2}\right) = 180° \Rightarrow 2x + \frac{x}{2} = 90°$$

$$\Rightarrow 4x + x = 180° \Rightarrow 5x = 180° \Rightarrow x = 36°.$$

Portanto, os ângulos do triângulo ABC são $36°, 72°, 72°$.



37. Prolongue os lados AB, CD e EF em ambas direções. Sejam P, Q e R os pontos de encontro entre estes prolongamentos. Note que $\angle PFA = \angle PAF = 60°$, pois são ambos suplementares a dois ângulos internos do hexágono (ambos iguais a $120°$). Portanto, o triângulo PAF é equilátero. Da mesma forma, BCQ e DER também são equiláteros. Mais ainda, PRQ será equilátero, pois tem todos os ângulos iguais a $60°$. Agora, sejam $PA = AF = FP = x$, $BC = CQ = QB = y$ e $DE = ER = RD = z$. Como PQR é equilátero,

$$PQ = QR \Rightarrow x + AB + y = y + DC + z \Rightarrow AB - DC = z - x = DE - AF.$$

Trocando os termos de lado, temos que $AB - DE = DC - AF$. Utilizando um raciocínio análogo, conseguimos a outra igualdade.