



Problemas Resolvidos

Nível 2

Princípio da Casa dos Pombos II

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

Problema 1. Em uma universidade, um professor de matemática ensina duas matérias por semestre. Sabendo que o professor esteve na universidade por 8 anos e que há 15 matérias distintas de matemática, prove que há ao menos uma matéria que o professor ensinou mais de uma vez.

Problema 2. Escolhemos 17 pontos dentro de um triângulo equilátero de lado 1. Prove que há dois deles que estão a uma distância menor que ou igual a $\frac{1}{4}$.

Problema 3. Um criador de pombos tem 200 pombos vivendo em gaiolas. Ao todo, são 101 gaiolas, nenhuma das quais está vazia. Prove que é possível escolher um subconjunto de gaiolas de tal modo que o total de pombos vivendo nelas é exatamente 100.

Problema 4. O plano é pintado usando três cores. Prove que existe um retângulo cujos vértices têm todos a mesma cor.

Problema 5. A sequência de Fibonacci, (F_n) , é definida da seguinte forma:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{e, para } n \geq 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Prove que existe um elemento de sequência de Fibonacci que é divisível por 1000.

Problema 6 (Putnam). Sejam n um inteiro positivo, e $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto qualquer de números reais. Prove que existem um subconjunto não vazio $S \subset X$ e um inteiro m tais que

$$\left| m + \sum_{s \in S} s \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Problema 7 (Putnam). São escolhidos 5 pontos em uma esfera. Mostre que existe um hemisfério (uma metade da esfera, obtida “cortando” a esfera ao meio em alguma direção) que contém pelo menos 4 dos pontos escolhidos.

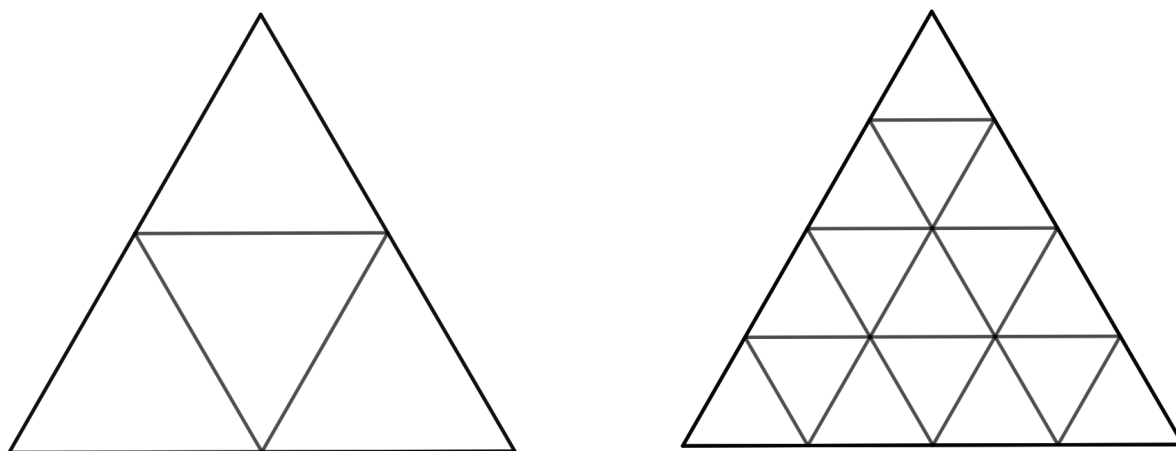
Obs.: Para os propósitos deste problema, os pontos que estão na borda dos hemisférios (os pontos que estão sobre a linha pela qual a esfera foi “cortada”) pertencem a ambos os hemisférios.

Problema 8 (Erdős–Szekeres). Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que, dada uma sequência de $ab+1$ números reais, existe uma subsequência monótona não-decrescente de comprimento pelo menos $a+1$ ou uma subsequência monótona não-crescente de comprimento pelo menos $b+1$.

Soluções

1. Trata-se de uma aplicação imediata do princípio da casa dos pombos: se o professor não tivesse ensinado nenhuma matéria mais de uma vez, ele teria ensinado no máximo 15 matérias, mesmo contando possíveis repetições (pois há 15 matérias na universidade). No entanto, ensinando duas matérias por semestre durante 8 anos, o professor ensinou ao todo 16 matérias, contando possíveis repetições. Absurdo.

2. Utilizando os pontos médios, dividimos o triângulo original em quatro triângulos equiláteros. Depois, aplicamos o mesmo processo a cada um dos triângulos menores, obtendo uma divisão do triângulo original em 16 triângulos equiláteros, todos de lado $\frac{1}{4}$.



Pelo princípio da casa dos pombos, ao menos dois dos 17 pontos pertencem ao mesmo triângulo menor. Como a distância entre dois pontos de um triângulo equilátero de lado $\frac{1}{4}$ é no máximo $\frac{1}{4}$, concluímos que há, dentre os pontos que escolhemos, dois deles que estão a uma distância menor que ou igual a $\frac{1}{4}$.

3. Sejam $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{101}$ as gaiolas. Para cada $k \in \{1, 2, \dots, 101\}$, seja C_k o conjunto

$$\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_k\},$$

e seja n_k o total de pombos vivendo nas gaiolas de C_k .

Dos fatos de que nenhuma das gaiolas está vazia e de que o total de pombos é 200, segue que $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{101} = 200$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, 100\}$, definamos p_i como sendo o par $\{i, 100 + i\}$. Pelo que acabamos de observar, cada um dos números n_1, n_2, \dots, n_{101} pertence a um dos pares p_1, p_2, \dots, p_{100} . Como são 101 números e 100 pares, pelo princípio da casa dos pombos existem n_i e n_j que pertencem ao mesmo par, digamos, p_l . Assim, para alguns i, j e l , as gaiolas

$$g_1, g_2, g_3, \dots, g_i$$

contêm, juntas, l pombos, enquanto que as gaiolas

$$g_1, g_2, g_3, \dots, g_i, \dots, g_j$$

contêm, juntas, $100 + l$ pombos.

Nessa situação, as gaiolas

$$g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_j$$

hão de conter, juntas, exatamente 100 pombos.

4. Escolha quatro retas r_1, r_2, r_3, r_4 paralelas entre si e $3^4 + 1 = 82$ retas s_1, s_2, \dots, s_{82} perpendiculares a elas e paralelas entre si.

Para cada uma das retas s , observe as interseções entre ela e as retas r_1, r_2, r_3, r_4 . Cada interseção é um ponto, que pode ter uma dentre três cores. Assim, a configuração formada pelas cores das interseções ($s \cap r_1, s \cap r_2, s \cap r_3, s \cap r_4$) é uma dentre $3^4 = 81$ possíveis configurações. Como há 82 retas s , pelo princípio da casa dos pombos, ao menos uma configuração se repete. Em outras palavras, pelo princípio da casa dos pombos, existem i e j tais que $s_i \cap r_k$ tem a mesma cor que $s_j \cap r_k$, para cada $k = 1, 2, 3, 4$.

Como são três cores possíveis, devem existir, mais uma vez pelo princípio da casa dos pombos, k_1 e k_2 tais que $s_i \cap r_{k_1}$ tem a mesma cor que $s_i \cap r_{k_2}$.

Dessa forma, $s_i \cap r_{k_1}, s_i \cap r_{k_2}, s_j \cap r_{k_1}$ e $s_j \cap r_{k_2}$ têm todos a mesma cor. Como as retas r são paralelas entre si e as retas s são perpendiculares às retas r (e paralelas entre si), os pontos $s_i \cap r_{k_1}, s_i \cap r_{k_2}, s_j \cap r_{k_1}$ e $s_j \cap r_{k_2}$ formam um retângulo.

Existe, portanto, um retângulo cujos vértices têm todos a mesma cor.

5. Considere os pares (F_i, F_{i+1}) , formados por termos consecutivos da sequência de Fibonacci, e os separe em conjuntos, de acordo com os restos das divisões de cada um dos termos por 1000: dois pares (F_i, F_{i+1}) e (F_j, F_{j+1}) pertencem ao mesmo conjunto se, e somente se, F_i e F_j deixam o mesmo resto quando divididos por 1000 e F_{i+1} e F_{j+1} deixam o mesmo resto quando divididos por 1000.

Como existem infinitos pares e apenas uma quantidade finita de possíveis combinações (r, s) , em que r e s são restos da divisão de um número inteiro por 1000, segue do princípio da casa dos pombos que existem dois pares, digamos, (F_i, F_{i+1}) e (F_j, F_{j+1}) , que pertencem ao mesmo conjunto. Assim, F_i e F_j deixam o mesmo resto quando divididos por 1000, assim como F_{i+1} e F_{j+1} . Sem perdas, suponhamos $i < j$.

De $F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$, podemos escrever $F_{j-1} = F_{j+1} - F_j$. Da mesma forma, $F_{i-1} = F_{i+1} - F_i$. Assim, F_{j-1} e F_{i-1} também deixam o mesmo resto quando divididos por 1000.

Repetindo o mesmo argumento, mostra-se por indução que, para qualquer k entre 0 e i , F_{j-k} e F_{i-k} deixam o mesmo resto quando divididos por 1000.

Em particular, F_{j-i} e F_0 deixam o mesmo resto quando divididos por 1000. Como $F_0 = 0$, segue daí que F_{j-i} é divisível por 1000.

6. Todo número real x pode ser escrito de modo único na forma

$$x = m + r$$

com m inteiro e $r \in [0, 1)$. Ao número r , chamamos de *parte fracionária* de x , e o representamos costumeiramente por $\{x\}$.

Definamos, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$s_k := x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Consideremos as partes fracionárias, $\{s_k\}$, das somas s_k .

Se existe k tal que $\{s_k\} \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$, o problema está resolvido: temos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m + \{s_k\} \implies \left|(-m) + \sum_{i=1}^k x_k\right| = \{s_k\} \leq \frac{1}{n+1}$$

para algum inteiro m .

Da mesma forma, se existe k tal que $\{s_k\} \in \left[\frac{n}{n+1}, 1\right)$, o problema está resolvido: temos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m + \{s_k\} \implies \left|(-m-1) + \sum_{i=1}^k x_k\right| = |-1 + \{s_k\}| = 1 - \{s_k\} \leq \frac{1}{n+1}$$

para algum inteiro m .

Suponhamos, então, que para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\{s_k\} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right)$.

Repartamos o intervalo $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right)$ em $n-1$ intervalos menores, escrevendo

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right] \cup \left[\frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right).$$

Como estamos lidando com n somas s_k e temos, ao todo, $n-1$ intervalos, deve haver, pelo princípio da casa dos pombos, duas somas cujas partes fracionárias estão no mesmo intervalo. Assim, existem i e j , com $i < j$, tais que $\{s_i\}$ e $\{s_j\}$ pertencem ambos a um mesmo intervalo

$$\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right].$$

Daí, $|\{s_i\} - \{s_j\}| \leq \frac{1}{n+1}$. Escrevamos $s_i = m_1 + \{s_i\}$ e $s_j = m_2 + \{s_j\}$ (com m_1 e m_2 inteiros). Segue daí que

$$\begin{aligned} \left|(-m_2 + m_1) + \sum_{t=i+1}^j x_t\right| &= |(-m_2 + m_1) + (s_j - s_i)| \\ &= |(s_j - m_2) - (s_i - m_1)| \\ &= |\{s_j\} - \{s_i\}| \\ &\leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto, o subconjunto $\{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j\} \subset X$ satisfaz a condição desejada.

7. Dos cinco pontos, escolhemos dois e dividimos a esfera (em dois hemisférios) através de uma linha que passa por eles¹. Pelo princípio da casa dos pombos, ao menos dois dos três demais pontos pertencem ao mesmo hemisfério. Como os dois pontos que escolhemos inicialmente pertencem a ambos os hemisférios (pois estão sobre o corte), segue daí que há ao menos quatro pontos no mesmo hemisfério.

¹É sempre possível dividir a esfera em dois hemisférios fazendo o “corte” passar por dois pontos dados. De fato, dados dois pontos no espaço, existe um plano que contém a ambos e ao centro da esfera. Se cortarmos através desse plano, dividiremos a esfera exatamente ao meio.

8. A cada elemento da sequência, associe um par de inteiros positivos (m, n) , sendo m o comprimento da maior subsequência monótona não-decrescente que termina no elemento (incluindo o próprio), e n o comprimento da maior subsequência monótona não-crescente que termina no elemento (incluindo o próprio). Veja que m e n são sempre positivos, pois no pior dos casos podemos tomar a subsequência formada apenas pelo próprio elemento, que é monótona não-crescente e monótona não-decrescente e tem comprimento 1.

A observação-chave é que, se e_1 e e_2 são elementos distintos da sequência, então os pares associados a eles, digamos, (m_1, n_1) e (m_2, n_2) , respectivamente, são distintos. De fato, suponhamos, sem perdas, que e_1 aparece antes de e_2 . Então, se $e_1 \leq e_2$, toda subsequência monótona não-decrescente que termina em e_1 pode ser estendida a uma subsequência monótona não-decrescente que termina em e_2 , donde $m_2 \geq m_1 + 1$. Por outro lado, se $e_1 \geq e_2$, toda subsequência monótona não-crescente que termina em e_1 pode ser estendida a uma subsequência monótona não-crescente que termina em e_2 , donde $n_2 \geq n_1 + 1$. Isso mostra que (m_1, n_1) e (m_2, n_2) são sempre distintos.

Se não houvesse subsequência monótona não-decrescente de comprimento pelo menos $a + 1$ e tampouco houvesse subsequência monótona não-crescente de comprimento pelo menos $b + 1$, então cada um dos pares (m, n) que associamos aos elementos da sequência original seria tal que $m \leq a$ e $n \leq b$, isto é, tal que $m \in \{1, 2, \dots, a\}$ e $n \in \{1, 2, \dots, b\}$. No entanto, nessas condições, teríamos no máximo ab pares distintos. Absurdo! Dessa forma, existe uma subsequência monótona não-decrescente de comprimento pelo menos $a + 1$ ou uma subsequência monótona não-crescente de comprimento pelo menos $b + 1$.