

# Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

## Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

### Problemas de Álgebra II - Aula 05

Neste material de problemas de álgebra, a utilização de variáveis é quase necessária, alguns dos problemas inclusive necessitam de duas ou três variáveis!

Os exemplos a seguir podem ajudá-lo a entender como transformar enunciados em letras e números. Boas contas!

**Problema 1.** (OBM 1ª Fase) Em um quadrado mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, qual é o valor de  $x$ ?

1	14	$x$
26		13

**Solução.** Vamos chamar de  $y$  o número que está na casa superior direita. Dessa forma a diagonal que possui essa casa tem soma  $26 + 14 + y$ , que deve ser o mesmo valor da soma da última coluna, que é  $y + x + 13$ . Igualando as duas temos:  $y + x + 13 = 26 + 14 + y \Leftrightarrow x = 27$ .

**Problema 2.** (OBM 1ª Fase) João disse para Maria: “Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar”. Maria acrescentou: “E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho”. Juntos, os dois possuem quanto?

**Solução.** Seja  $J$  o total que João possui e  $M$  o total que Maria possui. João disse “Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar”, podemos escrever como:  $M + \frac{J}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}J$ . Maria disse “E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho”, escrevemos como:  $\frac{M}{2} = 5 \Leftrightarrow M = 10$ .

Substituindo na primeira equação encontramos  $J = 80$ , portanto  $J + M = 90$ .

**Problema 3.** (OBM 1ª Fase) Em uma certa cidade, a razão entre o número de homens e mulheres é  $2 : 3$  e entre o número de mulheres e crianças é  $8 : 1$ . Qual é a razão entre o número de adultos e crianças?

**Solução.** Sejam  $H$ ,  $M$  e  $C$  as quantidades de homens, mulheres e crianças, respectivamente. Temos  $\frac{H}{M} = \frac{2}{3}$  e  $\frac{M}{C} = 8$ . Veja que,  $\frac{H}{C} = \frac{H}{M} \times \frac{M}{C} = \frac{16}{3}$ . Logo, a razão entre o número de adultos e crianças é  $\frac{H + M}{C} = \frac{H}{C} + \frac{M}{C} = 8 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3}$ .

# 1 Problemas

## Problemas de Álgebra II: Problemas Introdutórios

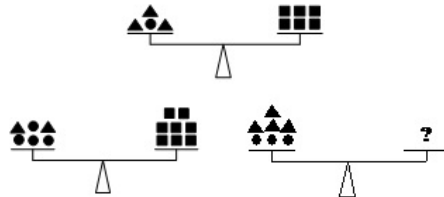
**Problema 4.** Os alunos de uma escola participaram de uma excursão, para a qual dois ônibus foram contratados. Quando os ônibus chegaram, 57 alunos entraram no primeiro ônibus e apenas 31 no segundo. Quantos alunos devem passar do primeiro para o segundo ônibus para que a mesma quantidade de alunos seja transportada nos dois ônibus?

**Problema 5.** Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha  $\frac{2}{5}$  da barra, Penha ganha  $\frac{1}{4}$  e Sônia ganha 70 gramas. Qual é o peso da barra?

**Problema 6.** Os gatos Mate e Tica estão dormindo no sofá. Mate chegou antes e quando Tica chegou, ela ocupou um quarto da superfície que havia sobrado do sofá. Os dois juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Qual parte da superfície do sofá está ocupada por Tica?

**Problema 7.** Um time de futebol ganhou 8 jogos mais do que perdeu e empatou 3 jogos menos do que ganhou, em 31 partidas jogadas. Quantas partidas o time venceu?

**Problema 8.** Figuras com mesma forma representam objetos de mesma massa. Quantos



quadrados são necessários para que a última balança fique em equilíbrio?

**Problema 9.** Paulinho e sua irmã saem ao mesmo tempo de casa para a escola. Paulinho vai de bicicleta, a uma velocidade média de 18 quilômetros por hora e sua irmã vai com uma moto. Ela chega 20 minutos antes de Paulinho. Neste momento, quantos quilômetros ainda faltam para Paulinho chegar?

**Problema 10.** O conteúdo de uma garrafa de refrigerantes enche três copos grandes iguais e mais meio copo pequeno ou 5 desses copos pequenos iguais mais a metade de um daqueles grandes. Qual é a razão entre o volume de um copo pequeno e o de um grande?

**Problema 11.** Mostre uma maneira de colocar nos oito vértices de um cubo os números de 1 a 8, um em cada vértice, de modo que a soma dos números em cada face seja sempre a mesma.

## Problemas de Álgebra II: Problemas Propostos

**Problema 12.** Um jornal publicou a tabela de um campeonato de futebol formado por quatro times, apresentando os gols marcados e os gols sofridos por cada time. Por uma falha de impressão, a tabela saiu com dois números borrados, conforme reprodução a seguir. Sabe-se que o time Esmeralda FC sofreu dois gols a mais que o time EC Boleiros. Quantos

	Gols marcados	Gols sofridos
Craques do Momento	8	4
Independentes	1	6
EC Boleiros	4	***
Esmeralda FC	5	***

gols sofreu o time Esmeralda FC?

**Problema 13.** No fim de 1994, Neto tinha a metade da idade de sua avó. A soma dos anos de nascimento dos dois é 3844. Quantos anos Neto completa em 2016?

**Problema 14.** Numa classe do sexto ano, de cada 11 estudantes, 4 são meninas. Se há 15 meninos a mais que meninas, quantos alunos há na classe?

**Problema 15.** Adão, Bernardo e Carlos jogaram uma partida com bolinhas de gude. Adão perdeu 5 bolinhas, Bernardo perdeu 4 e Carlos ganhou todas as bolinhas que eles perderam. Ao final do jogo, todos os meninos acabaram ficando com a mesma quantidade de bolinhas. Lembrando que sem bolinhas ninguém joga, pelo menos quantas bolinhas Adão e Bernardo tinham, juntos, quando começaram a jogar?

**Problema 16.** A Teoria das Filas é um conjunto de resultados aplicáveis em situações envolvendo filas em geral. Um dos resultados mais importantes da Teoria das Filas é a Lei de Little, provada pelo professor John Little, do MIT, em 1961:

*Em um sistema de filas em que as médias de pessoas que entram e saem são iguais, a quantidade média  $C$  de clientes no sistema é igual ao produto da média  $m$  de pessoas que chegam no sistema e do tempo médio  $t$  que cada cliente fica no sistema. Simbolicamente,  $C = m \times t$ .*

Por exemplo, se chegam em média 20 pessoas por hora em uma fila e cada pessoa gasta, em média, ao todo 15 minutos, ou seja, 0,25 hora na fila, a quantidade média de pessoas na fila é  $20 \times 0,25 = 5$ .

A loja OPM's tem um atendimento tão bom que todos os clientes que entram na loja compram algo. Sabe-se que, em média, 24 pessoas entram na loja por hora e que em média há 15 pessoas dentro da loja.

- Quanto tempo, em média, cada pessoa fica dentro da loja?
- Estima-se que, com uma campanha publicitária, pode-se quadruplicar a quantidade de pessoas que entram na loja por hora. Além disso, um treinamento com os atendentes fará com que o tempo médio para as pessoas passarem pelo caixa, incluindo o tempo que ficam na fila, caia pela metade. O que se espera que aconteça, sob o ponto de vista da Teoria das Filas, com a quantidade média de pessoas na fila do caixa?

**Problema 17.** Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra?

**Problema 18.** O coeficiente de isolamento é uma medida da capacidade de isolamento térmico de um material: quanto maior este coeficiente, menor é a quantidade de calor perdida através de uma parede feita deste material. Ou seja, quanto maior o coeficiente de isolamento, melhor o material protege do frio. A quantidade de calor  $Q$  perdida por uma parede em uma hora depende não só do material utilizado para construí-la, mas também de sua área e da diferença entre as temperaturas interna e externa.  $Q$  é dado pela fórmula:

$$Q = \frac{A \times \Delta T}{I}$$

Aqui  $A$  é a área,  $\Delta T$  é a diferença de temperatura e  $I$  é o coeficiente de isolamento.  $Q$  é dado em BTU por hora, a área da parede é dada em pés quadrados e a diferença de temperatura é dada em graus Fahrenheit. A unidade BTU é a abreviatura de *British Thermal Unit*. Sendo essa uma unidade de origem britânica, a fórmula acima utiliza unidades do antigo sistema de medidas desenvolvido no Reino Unido. Desta forma, devemos fazer os cálculos somente com essas unidades. Caso os dados estejam em outras unidades, devemos convertê-las. Na casa de Aino, em Helsinque, Finlândia, a parede que separa a sua sala e o lado de fora tem 9 pés de altura e 12 pés de largura. Em um certo dia no inverno, a temperatura interna da casa era de 20 graus Celsius.

- Para converter graus Celsius em Fahrenheit, utilizamos a fórmula  $F = \frac{9.C}{5} + 32$  sendo  $F$  e  $C$  a temperatura em graus Fahrenheit e Celsius, respectivamente. Qual era a temperatura, em graus Fahrenheit, dentro da sala de Aino?
- Se a parede for construída com blocos com coeficiente de isolamento igual a 1,8 e a perda de calor através dela é 4320 BTU por hora, qual era a temperatura, em graus Celsius, fora da casa de Aino?
- No rigoroso inverno finlandês, a menor temperatura é  $-40$  graus Fahrenheit e deseja-se que a temperatura interna da casa seja sempre de pelo menos 60 graus Fahrenheit. Suponha que a perda média de calor nos dias mais frios seja 4800 BTU por hora. Para isto, qual o menor coeficiente de isolamento dos blocos que se pode utilizar para construir a parede?

**Problema 19.** Maria tem 90 cartões. Ela numerou os cartões de 10 a 99 numa das faces e, para cada número escrito, escreveu a soma dos seus algarismos na outra face. Por exemplo, o cartão de número 43 tem o número 7 escrito no verso. Em quais cartões um número de uma face é o dobro do número escrito na outra face?

**Problema 20.** Com o dinheiro que Carlinhos tinha, poderia ter comprado 600 gramas de queijo ou 400 gramas de presunto. Usando esse dinheiro, ele resolveu comprar quantidades iguais de presunto e queijo. Quantos gramas de cada item ele comprou?

**Problema 21.** Na tabela a seguir, escreva os números de 1 a 9 em cada linha, de modo que a soma dos números escritos nas 9 colunas seja a mesma, igual a  $Y$ . Seja  $X$  a soma dos números de cada clinha. Calcule  $X + Y$ .

X									
X									
X									
	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y

**Problema 22.** As casas de um tabuleiro  $4 \times 4$  devem ser numeradas de 1 a 16, como mostrado parcialmente no desenho, formando um Quadrado Mágico, ou seja, as somas dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais são iguais.

14	11	5	x
	8		
12		3	
			y

- a) Que números devem ser escritos no lugar de  $X$  e de  $Y$ ?
- b) Apresente o Quadrado Mágico completo.

**Problema 23.** A partir das igualdades

$$\begin{aligned}
 3^2 - 1^2 &= 8 = 8 \times 1 \\
 5^2 - 3^2 &= 16 = 8 \times 2 \\
 7^2 - 5^2 &= 32 = 8 \times 3 \\
 &\dots \\
 2009^2 - 2007^2 &= 8 \times N,
 \end{aligned}$$

podemos escrever  $2009^2 - 1^2 = 4 \times N \times (N + 1)$ . Qual é o valor de  $N$ ?

**Problema 24.** As pesquisas eleitorais são feitas com uma quantidade relativamente pequena de pessoas. Por exemplo, na eleição da cidade de São Paulo, costumam ser entrevistadas cerca de duas mil pessoas. Um número bem pequeno considerando que há aproximadamente 7,5 milhões de eleitores na cidade. Neste problema, veremos que essa quantidade de pessoas é suficiente para se ter uma boa idéia dos percentuais de intenções de voto de cada candidato. Em toda pesquisa eleitoral, é calculada a margem de erro das porcentagens de cada candidato. Por exemplo, se um candidato tem 23% com margem de erro de 3

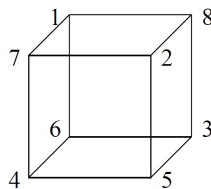
pontos percentuais, então ele deve receber entre  $23\% - 3\% = 20\%$  e  $23\% + 3\% = 26\%$  dos votos. O cálculo da margem de erro  $E$  para cada candidato é baseado em conhecimentos de Estatística, sendo feito a partir da fórmula:

$$E = Z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \text{ em que}$$

- $n$  é a quantidade de pessoas entrevistadas;
  - $p$  é a porcentagem de entrevistados que são favoráveis ao candidato;
  - $Z$  é um valor tabelado. O valor adotado pelos institutos de pesquisa é  $Z = 1,96$ , o qual assegura que, com 95% de certeza, a intenção de votos está dentro da margem de erro.
- a) Suponha que em uma pesquisa foram entrevistadas 1600 pessoas e o candidato Obamaldo foi escolhido por 36% desse total. Calcule  $E$  nesse caso e determine o intervalo em que está o percentual de intenções de voto para Obamaldo.
- b) Os institutos de pesquisa normalmente entrevistam 2500 pessoas para garantir uma margem de erro de no máximo 2 pontos percentuais. Quantas pessoas são necessárias para se garantir uma margem de erro de no máximo 1 ponto percentual?

Problemas de Álgebra II: Soluções dos Introdutórios

- 4) (OBM 1ª Fase) Seja  $x$  o número de alunos que deve sair de um ônibus e ir para o outro, então  $57 - x = 31 + x$ , resolvemos a equação para chegar em  $x = 14$ .
- 5) (OBM 1ª Fase) Seja  $x$  o peso da barra. Veja que Nelly e Penha pegam juntas  $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$  de  $x$ . A soma dessa parcela com os 70 gramas de Nelly é o total da barra. Portanto,  $\frac{13}{20}x + 70 = x \Leftrightarrow \frac{7}{20}x = 70 \Leftrightarrow x = 200$  gramas.
- 6) (OBM 1ª Fase) Sendo  $M$  a fração da superfície ocupada por Mate e  $T$  a fração da superfície ocupada por Tica, temos que  $M + T = \frac{1}{2}$  e  $T = \frac{1}{4}(1 - M)$ . Logo,  $M = 1 - 4T$  e então  $1 - 3T = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{6}$ .
- 7) (OBM 1ª Fase) Seja  $n$  o número de partidas que o time venceu. Então perdeu  $n - 8$  e empatou  $n - 3$  jogos. Portanto, somando o total de partidas que perdeu, empatou e ganhou, temos 31 ou seja,  $n + n - 8 + n - 3 = 31 \Leftrightarrow 3n - 11 = 31 \Leftrightarrow 3n = 42 \Leftrightarrow n = 14$ . O time venceu 14 partidas.
- 8) (OBM 1ª Fase) Chamamos o peso do triângulo de  $T$ , o peso do círculo de  $C$  e o peso do quadrado de  $Q$ . Temos então as seguintes equações:  $3T + 1C = 6Q$  e  $2T + 4C = 8Q$ , essa última podemos dividir inteira por 2 e escrevemos como  $T + 2C = 4Q$ . Somamos as duas equações para obter  $4T + 3C = 10Q$ .
- 9) (OBM 1ª Fase) Seja  $d$  a distância, em quilômetros, que falta para Paulinho chegar. Sabendo que  $20\text{min} = \frac{1}{3}\text{h}$ , pelo enunciado, temos:  $\frac{d}{\frac{1}{3}} = 18 \Leftrightarrow 3d = 18 \Leftrightarrow d = 6$  km.
- 10) (OBM 1ª Fase) Seja  $G$  o volume do copo grande e  $P$ , o do copo pequeno. Temos  $3G + 0,5P = 5P + 0,5G \Leftrightarrow 2,5G = 4,5P \Leftrightarrow \frac{P}{G} = \frac{2,5}{4,5} = \frac{5}{9}$ .
- 11) (OPM Fase Inicial) Chamemos os valores dos vértices de  $a, b, c, d, e, f, g, h$ . Sejam os vértices da face de baixo  $a, b, c, d$  e os vértices da face de cima  $f, g, h, i$ . Veja que  $a+b+c+d = f+g+h+i$ . Mas como  $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+\dots+7+8 = 36$ , então  $a+b+c+d = f+g+h+i = 18$ . Aplicamos a mesma ideia para as faces laterais e o problema termina. Uma configuração é a seguinte:



## Problemas de Álgebra II: Soluções dos Propostos

- 12) (OBM 1ª Fase) Todo gol marcado por um time conta também como gol sofrido por outro time, assim a quantidade total de gols marcados é igual a quantidade total de gols sofridos. Sendo  $x$  a quantidade de gols sofridos pelo Esmeralda FC, o EC Boleiros sofreu  $x - 2$  gols. Assim:

$$8 + 1 + 4 + 5 = 4 + 6 + x + x - 2 \Leftrightarrow 18 = 8 + 2x \Leftrightarrow x = 5$$

- 13) (OBM 1ª Fase) Se  $x$  era a idade de Neto no final de 1994, então o ano em que nasceu é  $1994 - x$ ; de forma análoga, o ano em que sua avó nasceu é  $1994 - 2x$ . Assim, temos  $1994 - x + 1994 - 2x = 3844 \Leftrightarrow 3988 - 3x = 3844 \Leftrightarrow 3x = 144 \Leftrightarrow x = 48$ . Portanto, Neto completa em 2016 a idade de  $(2016 - 1994) + 48 = 70$  anos.

- 14) (OBM 2ª Fase) Seja  $x$  a quantidade de meninas. Assim, a quantidade de meninos é  $x + 15$  e a quantidade total de alunos será  $2x + 15$ . Fazendo a proporção, temos:  $\frac{x}{2x + 15} = \frac{4}{11}$ . Resolvendo a equação, obtemos  $x = 20$ .

- 15) (OBM 1ª Fase) Vamos chamar de A, B e C as quantidades iniciais de bolinhas de Adão, Bernardo e Carlos, respectivamente. Se Carlos ganhou as bolinhas de seus amigos, ele passou a ter  $C + 9$  bolinhas, enquanto que Adão e Bernardo ficaram com  $A - 5$  e  $B - 4$  bolinhas, respectivamente. Assim, temos que  $C + 9 = A - 5 = B - 4$ . Dessa igualdade, tiramos que  $A = C + 14$  e  $B = C + 13$ . Como Carlos tinha ao menos 1 bolinha para começar a jogar, Adão tinha ao menos  $1 + 14 = 15$  bolinhas e Bernardo tinha ao menos  $1 + 13 = 14$  bolinhas. Portanto, Adão e Bernardo tinham, juntos, ao menos 29 bolinhas no começo do jogo.

- 16) (OPM Fase Final)

a) Do enunciado temos que  $C = m.t \Leftrightarrow 15 = 24.t \Leftrightarrow t = \frac{15}{24} = 0,625$  horas ou 37,5 minutos.

b) Quadruplicando a quantidade de pessoas que entram na loja e diminuindo o tempo médio de cada cliente na fila, teremos dentro da loja uma quantidade  $C'$  de pessoas tal que  $C' = 24.4.\frac{t}{2} \Leftrightarrow C' = 24t.2 \Leftrightarrow C' = 15.2 = 30$  clientes.

- 17) (OBM 1ª Fase) Sejam  $p$  a quantidade de pregos,  $q$  a de parafusos e  $r$  a de ganchos, então:  $p + 3q + 2r = 24$  e  $2p + 5q + 4r = 44$ . Somando as duas equações, temos  $3p + 8q + 6r = 68$ . E a compra da Juquinha pesou  $12p + 32q + 24r = 4(3p + 8q + 6r) = 4 \times 68 = 272g$ .

- 18) (OPM Fase Final)

a) 20 graus Celcius é o mesmo que  $\frac{9.20}{5} + 32 = 68$  F.



- b) Temos  $4320 = \frac{9.12.\Delta T}{1,8} \Leftrightarrow \Delta T = 72$  F. Como era inverno e a temperatura interna era 68 F, a temperatura externa era  $68 - 72 = -4$  F, ou seja,  $-4 = \frac{9.2C}{5} + 32 \Leftrightarrow C = -20$  C.
- c) O menor coeficiente de isolamento neste caso é  $4800 = \frac{9.12.(60 - (-40))}{I} \Leftrightarrow I = \frac{10800}{4800} = 2,25$
- 19) (OBM 1ª Fase) Para um número cujo algarismo das dezenas é  $a$  e cujo algarismo das unidades é  $b$ , temos  $10a + b = 2(a + b)$  ou  $a + b = 2(10a + b)$ . A segunda equação não tem soluções positivas, e na primeira equação temos  $10a + b = 2(a + b) \Leftrightarrow 10a + b = 2a + 2b \Leftrightarrow 8a = b$ . Necessariamente temos  $a = 1$  e  $b = 8$ . De fato, no cartão de número 18 a soma dos algarismos é 9.
- 20) (OBM 2ª Fase) Supondo que Carlinhos tem  $Q$  reais, o preço do grama de queijo é  $\frac{Q}{600}$  e o preço do grama de presunto é  $\frac{Q}{400}$ . Seja  $m$  a quantidade, em gramas, de queijo e de presunto que Carlinhos comprou. Dessa forma:  $m \cdot \frac{Q}{600} + m \cdot \frac{Q}{400} = Q \Leftrightarrow m \cdot \left( \frac{1}{600} + \frac{1}{400} \right) = 1 \Leftrightarrow m = 240$ . Portanto ele comprou 240 gramas de cada item.
- 21) (OBM 2ª Fase) A soma dos 27 números escritos na tabela é igual a 3 vezes  $X$  e a 9 vezes o  $Y$ . Como  $X$  é a soma dos números de cada linha, temos  $X = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 45$ . Portanto  $3 \times X = 3 \times 45 = 9 \times Y \Leftrightarrow Y = 15$ . Logo  $X + Y = 15 + 30 = 45$ .
- 22) (OBM 3ª Fase)

a) Veja os quadrados mágicos: Vendo-os, podemos afirmar que a soma total do qua-

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$
$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$

14	11	5	$X$
	8		
12		3	
			$Y$

drado é  $a_1 + a_2 + \dots + a_{16}$  o que equivale a  $1 + 2 + \dots + 16$  que é igual a 136. Sabendo que em cada linha a soma é a mesma, a soma de cada uma delas será  $136 \div 4 = 34$ . Como em cada linha, coluna e diagonal a soma será 34 os valores de  $X$  e  $Y$  serão:  $X = 34 - (14 + 11 + 5) = 4$  e  $Y = 34 - (14 + 8 + 3) = 9$ .

- b) Vamos utilizar a notação do item anterior, ou seja,  $a_1 = 14$ ,  $a_2 = 11$  e assim por diante. Veja que  $a_5$  é desconhecido e está embaixo de  $a_1 = 14$ , assim marcamos todas as casas desconhecidas. Sabendo que em cada linha, coluna ou diagonal a soma é 34, temos as seguintes equações:

$a_8 + a_{12} = 22$  (só podem ser 15 e 6, pois alguns dos números dos outros pares já aparecem).

$a_7 + a_{15} = 26$  (só podem ser 16 e 10, pois alguns dos números dos outros pares já aparecem).

$a_{10} + a_{14} = 15$  (só podem ser 13 e 2, pois alguns dos números dos outros pares já aparecem).

$a_5 + a_{13} = 8$  (só podem ser 7 e 1, pois se fossem 6 e 2 não daria certo, pois o 2 já aparece em  $a_{10}$  ou  $a_{14}$ ).

Sendo assim, na linha 3 a única combinação que dá certo é  $a_{10} = 13$  e  $a_{12} = 6$  caso fossem valores diferentes a soma da linha não daria 34. Tendo descoberto esses dois valores podemos descobrir os outros: Se  $a_8$  não for 6, só pode ser 15. Se  $a_{14}$  não for 13, só pode ser 2. Na linha 2 a única combinação que dá certo é  $a_5 = 1$  e  $a_7 = 10$  pois caso fossem outros valores a soma não daria 34. Tendo descoberto esses outros dois valores vamos descobrir mais outros: Se  $a_5 = 1$ ,  $a_{13}$  só pode ser 7. Logo se  $a_{13}$  é 7 e  $a_{14}$  é 2,  $a_{15}$  só pode ser 16. Sabendo todos os valores desconhecidos, o quadrado mágico fica completo.

- 23) (OBM 2ª Fase) Cada linha pode ser associada a um número ímpar e a um múltiplo de 8 da seguinte forma: na linha 1 temos o quadrado de  $1 = 2 \cdot 1 - 1$  (no lado esquerdo da igualdade) e 8 vezes 1 (no lado direito da igualdade), na linha 2 temos o quadrado de  $3 = 2 \cdot 2 - 1$  e 8 vezes 2, na linha 3 temos o quadrado de  $5 = 2 \cdot 3 - 1$  e 8 vezes 3 e assim sucessivamente, até chegarmos na linha  $N$  onde temos o quadrado de  $2007 = 2 \cdot N - 1$  e 8 vezes  $N$ . Assim,  $2N - 1 = 2007 \Leftrightarrow 2N = 2008 \Leftrightarrow N = 1004$ .

- 24) (OPM Fase Final)

a) A margem de erro é  $E = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,36(1-0,36)}{1600}} = 1,96 \cdot \frac{0,6 \cdot 0,8}{40} = 0,2353 = 2,352\%$ . Assim, Obamaldo deve receber entre  $36\% - 2,352\% = 33,648\%$  e  $36\% + 2,352\% = 38,352\%$ .

b) Como, para  $n = 2500$ , o máximo valor para  $E$  é  $2\% = 0,02$ , temos:  $1,96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{2500}} \leq 0,02 \Leftrightarrow \frac{1,96}{50} \cdot \sqrt{p(1-p)} \leq 0,02$ . Dividindo ambos os lados dessa desigualdade por 2 temos  $\frac{1,96}{100} \cdot \sqrt{p(1-p)} \leq 0,01 \Leftrightarrow 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{10000}} \leq 0,01$ . Logo, para garantir margem de erro de no máximo 1 ponto percentual, devem ser entrevistadas 10000 pessoas.