Problemas Resolvidos

Nível 2

Quadriláteros Notáveis

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. No quadrado $ABCD$ consideram-se as diagonais AC e BD. Seja P um ponto qualquer pertencente a um dos lados. Demonstrar que a soma das distâncias de P às duas diagonais é constante.

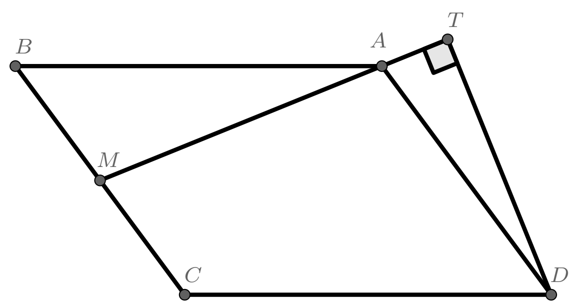
Problema 2. (Maio) No retângulo $ABCD$ de lados AB, BC, CD e DA, seja P um ponto do lado AD tal que $\angle BPC = 90°$. A perpendicular a BP traçada por A corta BP em M e a perpendicular a CP traçada por D corta CP em N. Demonstre que o centro do retângulo está no segmento MN.

Problema 3. Sejam ABC e ABD triângulos com o lado AB comum. O triângulo ABC tem $\angle BAC = 90°$ e $AB = 2AC$. O triângulo ABD tem $\angle ADB = 90°$ e $AD = BD$. O segmento CD corta o segmento AB em O. Calcule a medida de BO sabendo que $AC = 4$.

Problema 4. (OBM) O trapézio $ABCD$ tem bases AB e CD. O lado DA mede x e o lado BC mede $2x$. A soma dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle ABC$ é $120°$. Determine o ângulo $\angle DAB$.

Problema 5. No quadrilátero convexo $ABCD$, sejam E e F os pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente. Os segmentos CE e DF se cortam em O. Demonstre que se as retas AO e BO dividem o lado CD em três partes iguais então $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 6. Seja $ABCD$ um paralelogramo tal que M é o ponto médio de BC. Seja T a projeção de D sobre MA. Prove que $CT = CD$.



Problema 7. Prove que o segmento que liga os pontos médios dos lados opostos de um quadrilátero convexo passa pelo ponto médio do segmento que liga os pontos médios das diagonais.

Soluções

1. Denotemos por M o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Como $ABCD$ é um quadrado, temos que suas diagonais são iguais e se intersetam perpendicularmente no seu ponto médio. Denotemos por E e F os pés das perpendiculares desde P até AC e BD, respectivamente. Note que $PEMF$ é um retângulo e que $\triangle PCE$ é isósceles e retângulo (pois, por $ABCD$ ser um quadrado, temos que $\angle PCE = 45°$). Finalmente, $PF + PE = ME + EC = MC = \frac{AC}{2}$, que é independente da escolha do ponto P.

2. Denotemos por O o ponto de interseção da diagonal BD com o segmento MN. Basta mostrar que O é o ponto médio da diagonal BD.

Note que $AM \parallel CP$ e $DN \parallel BP$, pois $\angle AMB = \angle BPC = \angle CND = 90°$.

Note que $\angle BAM = 90° - \angle ABM = \angle PBC = 90° - \angle PCB = \angle NCD$. Um argumento similar mostra também que $\angle ABM = \angle CDN$. Como, além disso, $AB = CD$, temos que $\triangle ABM \equiv CDN$, pelo caso **a.l.a.** Isso mostra, em particular que $BM = ND$. Como temos também que $BM \parallel ND$, temos que $\angle MBO = \angle NDO$ e $\angle BMO = \angle DNO$, por serem alternos internos.

Logo, pelo caso **a.l.a.** temos que $\triangle BMO \equiv \triangle DNO$. Em particular, $BO = OD$, como queríamos mostrar.

3. Denotamos por x o comprimento de BO e por y o comprimento de AO. Temos que $x+y = AB = 8$. Seja M no segmento AB tal que $DM \perp AB$. Como $\triangle ABD$ é retângulo isósceles, temos que DM é também mediana e, como a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade de hipotenusa, temos que $DM = AM = BM = 4$.

Como AC e DM são segmentos iguais e paralelos temos que $\triangle ACO \equiv \triangle DMO$. Consequentemente, $AO = OM$. Temos então $8 = AB = 2AM = 4AO = 4y$, logo $y = 2$ e, portanto, $x = 8 - y = 8 - 2 = 6$.

4. Seja E em AB tal que $CE \parallel AD$. Note que $AECD$ é um paralelogramo, logo $CE = AD = x$. Também temos $\angle CEB = \angle DAB$ por serem correspondentes. Encontraremos $\angle CEB$.

Veja que $\angle BCE = 180° - (\angle CEB + \angle EBC) = 180° - 120° = 60°$. Seja F o ponto médio de BC, temos $BF = FC = x$. Note que $\triangle CEF$ é isósceles ($CE = CF = x$) e possui um ângulo igual a $60°$, considerando a soma dos ângulo internos, concluímos que todos os ângulo do triângulo são iguais e ele é, portanto, equilátero.

Finalmente temos $EF = CF = BF = x$ o que implica que $\angle CEB = 90°$, pois se um triângulo possui uma mediana igual à metade do lado correspondente, então o ângulo oposto a esse lado é reto.

5. Denotemos por G e H os pontos de interseção de DC com as retas BO e AO, respectivamente.

É suficiente mostrar que $DEFC$ é um paralelogramo. Para isso, mostraremos que suas diagonais se cortam no ponto médio, ou seja, que O é ponto médio de DF e CE.

Como H e F são pontos médios de CG e BC, respectivamente, temos que HF é base média do $\triangle CGB$, ou seja, $HF \parallel GB$.

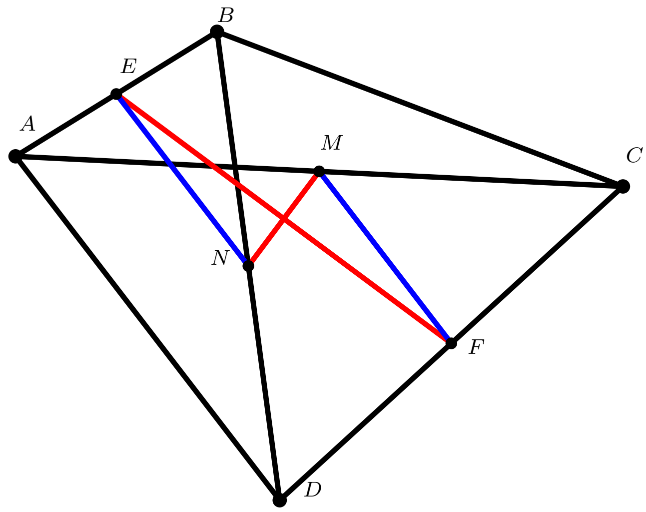
Usando que $GO \parallel HF$ e que G é ponto médio de DH, temos que GO é base média do $\triangle DFH$. Isso mostra que O é ponto médio de DF.

Um argumento análogo mostra que O também é ponto médio de CE.

6. Seja E o ponto de interseção das retas AM e CD. Como $AB \parallel CE$ temos que os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle CEM$ são semelhantes. A razão de semelhança é 1, pois $BM = MC$. Ou seja, $\triangle ABM \equiv \triangle CEM$.

Consequentemente temos $AB = CE$. Como $ABCD$ é paralelogramo, temos $AB = CD$. Logo TC é mediana do $\triangle TED$. Como $\triangle TED$ é retângulo, temos que a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa. Logo $CT = CE = CD$.

7. Considere o quadrilátero $ABCD$ representado na figura. Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e CD, respectivamente, e sejam M e N os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente.



Note que EN é base média do $\triangle ABD$ relativa ao lado AD e que FM é base média do $\triangle ACD$ relativa ao lado AD. Logo EN e MF são iguais e paralelos, o que implica que $EMFN$ é um paralelogramo e, portanto, suas diagonais (EF e MN) se cortam em seu ponto médio.