Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Curso de Aritmética - Nível 1

Prof. Emiliano Chagas

Problemas de Álgebra I - Aula 03

Os problemas de álgebra podem envolver em sua resolução o auxílio de variáveis. Nesse primeiro material de problemas de álgebra, a utilização de variáveis não é crucial, muitos dos problemas saem por métodos elementares de operações simples.

Mas fique atento, as variáveis são o corpo e a alma de álgebra, aprenda a gostar delas.

Problema 1. (OBM 1^a Fase) Para cortar um tronco reto de eucalipto em 6 partes, o madeireiro Josué faz 5 cortes. Ele leva meia hora para fazer os cortes, que são feitos sempre da mesma maneira. Quanto tempo Josué levará para cortar outro tronco igual em 9 pedaços?

Solução. Se para cortar um tronco reto de eucalipto em 6 partes, o madeireiro Josué faz 5 cortes e leva meia hora para fazer os cortes, vemos que cada corte é feito em $30 \times 5 = 6$ minutos. Portanto, para cortar outro tronco igual em 9 pedaços ele precisará fazer 8 cortes. E isso levará $8 \times 6 = 48$ minutos.

Problema 2. (EUA 1^a Fase) A taxa de meninos para meninas na sala de aula do Sr. Brown é de $2 : 3$. Se existem 30 estudantes na sala, quantas meninas a mais do que meninos existem na sala?

Solução. Seja $2x$ o número de meninos, então o número de meninas é $3x$. O total de estudantes é 30, logo $2x + 3x = 30 \Leftrightarrow x = 6$. Como queremos quantas meninas a mais do que meninos temos na sala, queremos $3x - 2x = x$, logo temos 6 meninas a mais do que meninos.

Problema 3. (OBM 1^a Fase) Carlos e seus dois amigos, Danilo e Edson, foram ao cinema. Carlos pagou a entrada de todos, Danilo pagou a pipoca e o suco para todos e Edson pagou o estacionamento do carro. Para acertar as contas, Danilo e Edson pagaram R$ 8,00 e R$ 14,00, respectivamente, para Carlos, pois a despesa total de cada um foi de R$ 32,00. Qual era o preço da entrada no cinema?

Solução. Para cada um, o gasto com a pipoca e o suco foi $(32 - 8) \div 3 = 24 \div 3 = 8$ reais e com o estacionamento foi $(32 - 14) \div 3 = 18 \div 3 = 6$ reais. Se a despesa total de cada um foi de 32 reais, o preço da entrada foi $32 - 8 - 6 = 18$ reais.

1 Problemas

Problemas de Álgebra: Problemas Introdutórios

Problema 4. Rosa e Maria começam a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?

Problema 5. Caio e Sueli começaram, separadamente, a guardar moedas de R$ 1,00 em janeiro de 2004. Todo mês Caio guardava 20 moedas e Sueli guardava 30 moedas. Em julho de 2004 e nos meses seguintes, Caio não guardou mais moedas, enquanto Sueli continuou a guardar 30 por mês. No final de que mês Sueli tinha exatamente o triplo do número de moedas que Caio guardou?

Problema 6. Sílvia pensou que seu relógio estava atrasado 10 min e o acertou, mas na verdade o relógio estava adiantado 5 min. Cristina pensou que seu relógio estava adiantado 10 min e o acertou, mas na verdade o relógio estava atrasado 5 min. Logo depois, as duas se encontraram, quando o relógio de Sílvia marcava 10 horas. Neste momento, que horas o relógio de Cristina indicava?

Problema 7. Esmeralda lançou um dado dez vezes e obteve 57 como soma de todos os pontos obtidos nesses lançamentos. No mínimo, quantas vezes saíram 6 pontos?

Problema 8. Ontem Dona Dulce gastou R$ 12,00 no mercado para comprar 4 caixas de leite e 6 pães. Hoje, aproveitando uma promoção no preço do leite, ela comprou 8 caixas de leite e 12 pães por R$ 20,00 no mesmo mercado. O preço do pão foi o mesmo que o de ontem. Qual foi o desconto que o mercado deu em cada caixa de leite?

Problema 9. Numa festa, na casa de Cláudia, havia crianças somente na cozinha, na sala e na varanda. Em certo momento, várias crianças começaram a correr ao mesmo tempo: 7 crianças correram da varanda para a cozinha, 5 crianças correram da cozinha para a sala, e 4 crianças correram da sala para a varanda. Ao final dessa correria, a quantidade de crianças na sala era igual a quantidade de crianças na varanda e também igual a quantidade de crianças na cozinha. Quantas crianças, no mínimo, havia na casa de Cláudia?

Problema 10. Uma empresa de telefonia celular oferece planos mensais de 60 minutos a um custo mensal de R$ 52,00, ou seja, você pode falar durante 60 minutos no seu telefone celular e paga por isso exatamente R$ 52,00. Para o excedente, é cobrada uma tarifa de R$ 1,20 cada minuto. A mesma tarifa por minuto excedente é cobrada no plano de 100 minutos, oferecido a um custo mensal de R$ 87,00. Um usuário optou pelo plano de 60 minutos e no primeiro mês ele falou durante 140 minutos. Se ele tivesse optado pelo plano de 100 minutos, quantos reais ele teria economizado?

Problemas de Álgebra: Problemas Propostos

Problema 11. Ana e Beatriz compraram dezoito bombons de mesmo preço. Ana pagou por oito deles e Beatriz pelos outros dez. Na hora do lanche, dividiram os bombons com Cecília e cada uma delas comeu seis. Para dividir igualmente o custo dos bombons, Cecília deveria pagar R$ 1,80 para Ana e Beatriz. Ela pensou em dar R$ 0,80 para Ana e R$ 1,00 para Beatriz, mas percebeu que essa divisão estava errada. Quanto ela deve pagar para Beatriz?

Problema 12. João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?

Problema 13. Um artesão começa a trabalhar as 8h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar as 12h mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

Problema 14. Segundo a matéria apresentada no programa "Fantástico"de 18/10/03, intitulada "Números da Cidade de São Paulo 2003", 150 mil lâmpadas de iluminação pública queimam por ano e 300 lâmpadas queimadas são trocadas todos os dias (fonte: Ilume, Secretaria Municipal de Infra-estrutura). Utilize calculadora nesse problema.

a) Quantas lâmpadas queimam, em média, por dia?

b) Supondo que estes números se mantenham nos próximos anos, estime em que ano pelo menos metade das 525 mil lâmpadas de iluminação pública estarão queimadas. Você deve supor que não havia lâmpadas queimadas no dia primeiro de janeiro de 2003.

Problema 15. Ao redor de um grande lago existe uma ciclovia de 45 quilômetros de comprimento, na qual sempre se retorna ao ponto de partida se for percorrida num único sentido. Dois amigos partem de um mesmo ponto com velocidades constantes de 20 km por hora e 25 km por hora, respectivamente, em sentidos opostos. Quando se encontram pela primeira vez, o que estava correndo a 20 km por hora aumenta para 25 km por hora e o que estava a 25 km por hora diminui para 20 km por hora. Quanto tempo o amigo que chegar primeiro ao ponto de partida deverá esperar pelo outro?

Problema 16. Sabe-se que $\frac{2}{9}$ do conteúdo de uma garrafa enchem $\frac{5}{6}$ de um copo. Para encher 15 copos iguais a esse, quantas garrafas deverão ser usadas?

Problema 17. Antônio é um perito da polícia que analisa acidentes automobilísticos. Ele sempre inicia uma investigação tentando descobrir a velocidade com a qual o veículo trafegava momentos antes do acidente. Um dos métodos por ele utilizado consiste em medir o tamanho de marcas (vestígios) ininterruptas deixadas pelos pneus travados pelos freios e então utilizar a fórmula $V = 3{,}6 \cdot \sqrt{19{,}6 \cdot \mu \cdot d}$ para obter uma aproximação da velocidade.

Nesta fórmula, V indica a velocidade, em km/h, com a qual o veículo trafegava no momento em que os freios foram acionados, travando as rodas até sua parada total, d corresponde ao tamanho, em metros, das marcas da freada e μ é o coeficiente de atrito (aspereza) da superfície. Veja alguns valores médios de coeficientes de atrito (μ):

Descrição da superfície	**Seca**	**Molhada**
Concreto novo (rugoso)	0,84	0,61
Concreto trafegado	0,69	0,56
Asfalto novo (rugoso)	0,79	0,62
Asfalto trafegado	0,66	0,53
Paralelepípedo novo (rugoso)	0,78	0,60
Paralelepípedo trafegado	0,68	0,48

Utilize calculadora nesse problema.

(a) Em um teste para uma revista automotiva, um motorista conduz um veículo sobre uma superfície seca de concreto novo. Em certo momento, o motorista aciona os freios, bloqueando as rodas até a parada total do veículo, deixando uma marca de 17 m de comprimento. Qual é a velocidade aproximada com que o veículo trafegava no momento em que os freios foram acionados?

(b) Sob intensa chuva, um motorista conduz, a 144 km/h, um veículo por uma rodovia de asfalto já bastante trafegado. Num trecho de reta, após perceber a presença de uma árvore caída sobre a rodovia, impedindo a passagem de qualquer veículo, ele reage e aciona os freios, travando as rodas até a parada completa do veículo. Exatamente no momento em que as rodas são travadas, o veículo está a 130 m da árvore. Se o carro continuar sua trajetória em linha reta, com as rodas bloqueadas, o motorista irá colidir com a árvore?

Problema 18. Anita imaginou que levaria 12 minutos para terminar a sua viagem, enquanto dirigia a velocidade constante de 80 km/h, numa certa rodovia. Para sua surpresa, levou 15 minutos. Com qual velocidade constante essa previsão teria se realizado?

Problema 19. Na Microlândia, há quatro times de futebol. O regulamento do campeonato microlandense de futebol, ou como é chamado carinhosamente pelos seus habitantes, o Microlandião, é o seguinte: na fase classificatória, cada um dos quatro times joga com todos os outros três exatamente uma vez. Em cada jogo, uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e uma derrota vale zero pontos. As duas equipes que conseguirem as maiores quantidades de pontos são classificadas para a grande final do Microlandião. Caso seja necessário, há um sorteio para definir as equipes classificadas. Por exemplo, se os times têm 9, 4, 4 e 0 pontos, respectivamente, há um sorteio para definir a segunda equipe que participará da final.

a) Qual é a menor pontuação possível de uma equipe classificada para a final?

b) Qual é a maior pontuação possével de uma equipe que não foi classificada para a final?

Problema 20. Joana foi comprar 20 canetas e comparou os preços em duas lojas: na loja A, cada caneta custa 3 reais, mas há uma promoção de 5 canetas pelo preço de 4, e na loja B, cada caneta custa 4 reais, mas a cada 5 canetas compradas, como brinde ela pode levar até mais duas de graça. Tentando fazer a melhor escolha entre comprar somente na loja A ou somente na loja B, quanto ela pode economizar?

Problema 21. Na Matemática, existem problemas que ninguém, nem mesmo matemáticos profissionais, resolveu ainda. Esses são os chamados *problemas em aberto*. Um problema em aberto famoso é o $3x + 1$: Considere um número inteiro positivo. Se esse número é ímpar, multiplique-o por 3 e some 1 ao resultado (daí o nome do problema!); se é par, divida-o por 2. Se o número obtido é 1, pare; se não, repita esse procedimento com o número obtido.

Por exemplo, se começamos com o número 20, obtemos os seguintes números:

$$20 \xrightarrow{:2} 10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\times 3+1} 16 \xrightarrow{:2} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1$$

O que ninguém sabe é se sempre obtemos o número 1, não importando qual é o número inicial. Já foram testados todos os números até 290 quatrilhões!

(a) Verifique que começando com o número 28, obtemos 1.

(b) Note que no final do nosso exemplo há uma sequência de potências de 2 iniciada por 16. O número que antecede 16 não é uma potência de 2. Existe algum número inicial para o qual os últimos números obtidos formem uma sequência de potências de 2 iniciada por 32? Não se esqueça: nesse caso, o número que antecede 32 não pode ser 64.

Problema 22. Na Krugerrândia, a empresa responsável pelo transporte urbano em ônibus oferece dois tipos de passe: Múltiplo de 2 e Múltiplo de 4. Em ambos os casos, o passageiro recebe um único passe, no qual está impresso o tipo. O controle da quantidade de viagens realizadas é feito eletronicamente, e o passe fica retido pela máquina ao término das viagens permitidas.

O passe Múltiplo de 2 custa Kr$3,10 e dá direito a duas viagens quaisquer e o Múltiplo de 4 custa Kr$5,90 e dá direito a quatro viagens quaisquer. Para definir o preço de cada passe, a empresa computou apenas o gasto com a confecção do passe (que é o mesmo para os dois tipos) e o gasto correspondente as viagens a que dá direito cada passe.

(a) Qual é o gasto com a confecção de cada passe?

(b) A empresa quer criar o passe Múltiplo de 8, que dará direito a oito viagens quaisquer. De acordo com as informações apresentadas, quanto custará o passe Múltiplo de 8?

Problema 23. Em uma prova de múltipla escolha, Júlia acertou 100 das 128 questões possíveis. Ela verificou que a maior quantidade de questões consecutivas que ela acertou é N. Qual é o valor mínimo para N?

Problema 24. O Homem sempre foi fascinado por números gigantes. Na Antiguidade, Arquimedes inventou um método para escrever um número que excedesse a quantidade de grãos de areia necessários para preencher o universo. O número de Arquimedes é aproximadamente $10^{(10^{16902})}$.

Há uma maneira simples para se escrever números gigantes. Utilizando o símbolo $\uparrow$, podemos representar potências da seguinte maneira:

- $A \uparrow B = A^B$, como por exemplo, $2 \uparrow 3 = 8$;
- $A \uparrow\uparrow B = A^{(A^{(\ldots A)})}$, onde A aparece B vezes, como por exemplo, $2 \uparrow\uparrow 3 = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16$.

Deste modo $10^{(10^{16902})}$ pode ser representado assim: $10 \uparrow (10 \uparrow 16902)$.

(a) Determine o valor numérico de $5 \uparrow 2$ e $5 \uparrow\uparrow 2$.

(b) Na expressão $2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow (\ldots \uparrow (2))))$, qual é o menor número de $\uparrow$ que devemos colocar a fim de obtermos um número maior do que $10 \uparrow 9$? Nesse item utilize calculadora. Justifique sua resposta!

Problema 25. Certo banco brasileiro obteve um lucro de R$ 4,1082 bilhões ao final do primeiro semestre de 2008. Esse valor representa um aumento de 2,5% em relação ao resultado obtido no mesmo período do ano passado. Qual é a soma dos dígitos do número inteiro que representa, em reais, o lucro desse banco no primeiro semestre de 2007?

Problema 26. Três carros com velocidades constantes cada um, na mesma estrada, passam no mesmo momento por Brasilópolis. Ao viajar 100 quilômetros, o carro A passa por Americanópolis, 20 quilômetros a frente do carro B e 50 quilômetros a frente do carro C. Quando o carro B passar por Americanópolis, quantos quilômetros estará a frente do carro C?

Problema 27. No planeta POT o número de horas por dia é igual a número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em POT há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?

Problema de Álgebra: Soluções dos Introdutórios

4) (OBMEP 1^a Fase) Como 100 degraus $= 10 \times 10$ degraus, Rosa gastará $15 \times 10 = 150$ segundos para chegar ao último degrau da escada. Do mesmo modo, Maria levará $20 \times 10 = 200$ segundos para atingir o topo da escada. Assim, quando Rosa terminar de subir a escada, faltarão $200 - 150 = 50$ segundos para Maria completar a subida.

5) (OBMEP 1^a Fase) De janeiro a junho há 6 meses. Portanto, Caio economizou $6 \times 20 = 120$ moedas até junho. O triplo de 120 é $3 \times 120 = 360$. Como Sueli continuou guardando 30moedas por mês, ela conseguiu guardar 360 moedas após $360 \div 30 = 12$ meses, ou seja, em dezembro de 2004.

6) (OBM 1^a Fase) Se Sílvia acertou o relógio, ela adiantou 10min. Como já estava adiantado 5min, o relógio ficou 15min adiantado. Portanto, se marcava 10h, era na verdade 9h45min. Se Cristina acertou o relógio, ela atrasou 10min. Como já estava atrasado 5min, o relógio ficou 15min atrasado. Como 9h45min foi o horário real do encontro, o relógio de Cristina indicava 9h30min.

7) (OBM 1^a Fase) A soma máxima dos pontos é $6 \times 10 = 60$ e portanto em no máximo três lançamentos o número obtido não é o máximo. Assim, em pelo menos sete lançamentos o número obtido é o máximo 6.

8) (OBMEP 1^a Fase) Hoje Dona Dulce comprou o dobro do que comprou ontem, logo ela deveria pagar $2 \times 12 = 24$ reais. Como ela pagou apenas 20 reais, a promoção fez com que ela economizasse $24 - 10 = 4$ reais na compra de 8 caixas de leite. Logo o desconto em cada caixa de leite foi de $4 \div 8 = 0,50$ reais, ou seja, de R$ 0,50.

9) (OBMEP 1^a Fase) Ao final da correria, a cozinha ficou, no mínimo, com as 7 crianças que vieram da varanda; logo, todos os cômodos da casa terminaram com pelo menos 7 crianças. A varanda perdeu $7 - 4 = 3$ crianças na correria; para que, ao final, ela ficasse com pelo menos 7 crianças, ela deveria ter pelo menos $7 + 3 = 10$ crianças no início. Já a cozinha ganhou $7 - 5 = 2$ crianças; para acabar com pelo menos 7 crianças, ela deveria ter pelo menos $7 - 2 = 5$ crianças no início. De modo análogo, a sala deveria ter pelo menos 6 crianças no início. Logo, o número de crianças na casa era, no mínimo, $10 + 5 + 6 = 21$.

10) (OBM 1^a Fase) O usuário pagou $52 + (140 - 60) \times 1,20 = 148$ reais; no plano de 100 minutos teria pago $87 + (140 - 100) \times 1,20 = 135$ reais, ou seja, teria economizado $148 - 135 = 13$ reais.

Problemas de Álgebra: Soluções dos Propostos

11) (OBMEP 1^a Fase) Cada uma das meninas comeu 6 bombons. Como Cecília pagou R$1,80 pelos seus, cada bombom custou $R\$1,80 \div 6 = R\$0,30$. Beatriz comprou dez bombons e comeu seis, logo ela deu quatro para Cecília e por isso deve receber $4 \times R\$0,30 = R\$1,20$.

12) (OBMEP 1^a Fase) Vamos chamar de D a distância entre Pirajuba e Quixajuba. Qualquer que seja o combustível utilizado, temos $D =$ litros consumidos $\times$ quilômetros por litro . Isso mostra que as grandezas "litros consumidos" e "quilômetros por litro" são inversamente proporcionais (pois seu produto é constante). Sendo A os litros consumidos na ida, e B os litros consumidos na volta, podemos escrever:
$\frac{A}{B} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$
Basta então achar uma fração equivalente a $\frac{5}{4}$ na qual a soma do numerador com o denominador seja 18. Essa fração é $\frac{10}{8}$; ou seja, João gastou 10 litros de álcool na ida e 8 litros de gasolina na volta. Logo a distância entre Pirajuba e Quixajuba é $12 \times 10 = 8 \times 15 = 120$ quilômetros.

13) (OBM 1^a Fase) O número de braceletes feitos pelo artesão é $4horas \times \frac{8}{20}$ braceletes por minuto $= 72$. O auxiliar produz $\frac{8}{1/2}$ braceletes por hora $= 16$ braceletes por hora. Então 72 braceletes $= 16 \times \frac{braceletes}{hora} \times t \Leftrightarrow t = \frac{72}{16} = 4,5$ horas. Temos 9 horas + 4,5 horas = 13 horas e 30 minutos.

14) (OPM Fase Final)
    a) $150000 \div 365 \approx 411$ lâmpadas
    b) Por dia $411 - 300 = 111$ lâmpadas queimadas não são trocadas. Gostaríamos de saber quando $111 \times x = 525000/2$. Resolvendo a equação temos que $x = 2364$ dias, ou seja, em 6 anos e meio, aproximadamente, metade das lâmpadas de São Paulo estarão apagadas.

15) (OBM 1^a Fase) O intervalo de tempo entre a partida e o primeiro encontro é igual ao intervalo de tempo entre o primeiro encontro e o segundo encontro, no ponto de partida. Isso acontece porque ao se inverterem as velocidades, a situação seria a mesma que se cada um deles retornasse ao ponto de partida pelo caminho que veio, com a mesma velocidade. Portanto, eles chegarão no mesmo instante, ou seja, o tempo que um irá esperar pelo outro será igual a 0.

16) (OBM 1^a Fase) Serão necessários $15 \times \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}} = 15 \times \frac{2}{9} \times \frac{6}{5} = 4$ garrafas.

17) (OPM Fase Final)

    a) Aproximadamente 60 km/h.
    b) O motorista colidirá com a árvore, pois o carro percorreria aproximadamente 154 m.

18) (OBM 1^a Fase) Viajando a 80 km/h por 15 minutos, ou seja, $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ de hora, Anita percorreu $\frac{80}{4} = 20$ km. Para conseguir percorrer esses 20 km em 12 minutos, ou seja, $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ de hora, ela deveria trafegar a uma velocidade constante de $\frac{20}{\frac{1}{5}} = 20 \times 5 = 100$ km/h.

19) (OPM Fase Final) Vamos chamar as equipes de Optigol, Mithbol, Oithclub e Arapiraca.

    a) Uma possibilidade de resultados para que algum time passe para a segunda fase com 2 pontos é a seguinte: o Optigol ganha de todos os outros três times; todos os outros três jogos (Mithbol x Oithclub; Oithclub x Arapiraca; Arapiraca x Mithbol) terminam empatados. Nesse caso, Optigol fica com 9 pontos e todos os outros três times com 2 pontos.

       Suponha agora que, em uma outra situação, um dos clubes, digamos, o Arapiraca, fez 1 ponto ou menos. Então pelo menos dois times ganharam do Arapiraca e fizeram pelo menos 3 pontos, o superando. Deste modo, um time que faz menos de 2 pontos n ao pode ser classificado para a final. Portanto a menor pontuação possível de uma equipe classificada para a final é 2 pontos.

    b) Uma possibilidade de resultados para que algum time não passe para a segunda fase com 6 pontos é a seguinte: o Optigol perde de todos os outros três times; o Mithbol ganha do Oithclub; o Oithclub ganha do Arapiraca; o Arapiraca ganha do Mithbol. Nesse caso, a tabela do campeonato fica assim: Mithbol, Oithclub e Arapiraca empatados com 6 pontos e Optigol com 0 pontos. Assim, um dos times que fez 6 pontos não se classificará para a final.

       Suponha agora que, em uma outra situação, um dos clubes, digamos, o Arapiraca, fez 7 pontos ou mais. Então dois times perderam do Arapiraca e fizeram no máximo 6 pontos, ou seja, o Arapiraca está na frente de dois times na tabela, estando classificado para a final. Deste modo, um time que faz mais de 6 pontos com certeza está classificado para a final. Portanto a maior pontuação possível de uma equipe que não foi classificada para a final é 6 pontos.

20) (OBM 1^a Fase) Se Joana comprar as 20 canetas na Loja A, ela pagará o preço de 16 canetas (já que $20 = 4 \times 5$ e a cada cinco canetas ela paga o preço de apenas quatro). Assim, na Loja A ela gastaria $16 \times 3 = 48$ reais, já que cada caneta custa 3 reais. Se Joana comprar as 20 canetas na Loja B, como ela compra 5 e ganha 2, ou seja, a cada 7 ela paga o preço de apenas 5. Assim, Joana precisa de $7 + 7 + 6$ canetas, que saem pelo preço de apenas $3 \times 5 = 15$ canetas. Como cada unidade custa 4 reais, ela gastaria $15 \times 4 = 60$ reais na Loja B. Assim, entre a opção mais barata e a mais cara, Joana pode economizar $60 - 48 = 12$ reais.

21) (OPM Fase Final)

(a) A sequência fica: $28 \to 14 \to 7 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

(b) Não. Como o número que antecede 32 não pode ser 64, o número que antecede 32 deve ser então ímpar e, nesse caso, 32 deveria ser um múltiplo de 3 mais 1, o que é um absurdo. De outra maneira, seja x o número que antecede 32, x ímpar. Logo $3x + 1 = 32 \Leftrightarrow x = \dfrac{31}{3}$ que não é inteiro.

22) (OPM Fase Inicial)

(a) Os Kr$3,10 cobrados pelo passe Múltiplo de 2 referem-se ao gasto com sua confecção mais 2 viagens e os Kr$5,90, pelo Múltiplo de 4, referem-se ao gasto com sua confecção mais 4 viagens. Portanto, fazendo Kr$5,90 menos Kr$3,10 obtemos Kr$2,80, que correspondem ao gasto com 2 viagens. E assim, fazendo Kr$3,10 − Kr$2,80, obtemos Kr$0,30, que corresponde ao gasto com a confecção de um passe.

(b) No passe Múltiplo de 8 deverão ser computados o gasto com a confecção mais 8 viagens. Logo deverá custar Kr$0,30 + 4 × Kr$2,80, ou seja, Kr$11,50.

23) (OBM 2^a Fase) A resposta é 4. Vamos supor que esse máximo fosse 3. Sendo C a questão que ela marcou a alternativa correta e E a questão que ela errou, então, a maior quantidade que Júlia poderia acertar ocorreria quando $C, C, C, E, C, C, C, E, C, C, C, E, \ldots$ Ou seja, ela acertaria 3 e erraria 1 em cada 4 questões. Ora, mas isso seria igual a$\dfrac{3}{4} \times 128 = 96$, que é menor do que as 100 que ela acertou. Desse modo, $N > 3$. Analisando o caso seguinte, veja que ela pode acertar, por exemplo:

$C, C, C, C, E, C, C, C, C, E, \ldots, C, C, C, C, E, E, E, E$

onde ela acertaria $\dfrac{4}{5} \times 125 = 100$ questões até a questão 125 e ela erraria as 3 últimas.

24) (OPM Fase Inicial)

a) 25 e 3125.

b) Devemos colocar 4 flechas. Temos $2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow 2)) = 2^{16} < 10^9$ e $2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow 2))) = 2^{2^{16}} > 10^9$.

25) (OBM 2^a Fase) Seja x o lucro desse banco no primeiro semestre de 2007, em bilhões de reais. Logo $x + 2,5\%x = 4,1082 \Leftrightarrow x + 0,025x = 4,1082 \Leftrightarrow 1,025x = 4,1082 \Leftrightarrow x = 4,008$ bilhões de reais, ou seja, o lucro foi de R$ 4008000000,00, cuja soma dos dígitos é 12.

26) (OBM 1^a Fase) No trajeto de 100 km, como o carro A passa por Americanópolis 20 quilômetros a frente do carro B, o carro B já percorreu $100 - 20 = 80$ km do trajeto e, de forma análoga, o carro C já percorreu $100 - 50 = 50$ km do mesmo trajeto. Perceba que, enquanto o carro B percorre 80 km, o carro C percorre 50 km, ou seja, enquanto

o carro C percorre 1 km, o carro B percorre $80 \div 50 = 1,6$ km. Assim, quando o carro B passar por Americanópolis, tendo percorrido os 20 km que lhe faltam, o carro C terá percorrido $20 \div 1,6 = 12,5$ km e estará $100 - (50 + 12,5) = 37,5$ km atrás do carro B.

27) (OBM 1^a Fase) Supondo que x seja o número de horas por dia, então x também é o número de dias por semana, o número de semanas por mês e o número de meses por ano. Logo, o número de horas por ano é $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 = 4096 \Leftrightarrow x^4 = 2^{12} \Leftrightarrow x^4 = (2^3)^4 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$. Portanto o número de semanas por mês é 8.