Problemas Resolvidos

Nível 2

Jogos

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. Andressa e Bruna jogam um jogo. Elas iniciam com 2008 moedas dispostas em um círculo e fazem suas jogadas em turnos alternados, Andressa realizando a primeira jogada. Em seu turno, uma jogadora pode remover uma moeda ou, se duas moedas adjacentes permanecem no círculo, ela pode remover as duas. Vence quem remover a última moeda. Prove que Bruna tem a estratégia vencedora, independente de como Andressa jogue.

Problema 2. Arnaldo e Bárbara jogam o seguinte jogo. No primeiro turno, o número 2019 está escrito numa folha de papel. Arnaldo deve então escolher um dos dígitos **diferentes de zero** deste número e subtraí-lo de 2019, repassando o resultado para Bárbara. Em sua vez, Bárbara deve subtrair do número que recebeu de Arnaldo um dos dígitos **diferentes de zero** deste número e repassar o resultado para Arnaldo. Eles repetem essa regra alternadamente e quem não puder mais jogar perde, ou seja, quem receber o número 0 de seu oponente. Quem tem a estratégia vencedora?

Problema 3. (Centro-americana 2001) Dois jogadores, Adriana e Bruno, estão sentados em um grande círculo com mais 2001 pessoas, de forma que Adriana e Bruno não estão em posições consecutivas. Começando por Adriana, eles jogam o seguinte jogo em turnos alternados. Cada jogada consiste em tocar no ombro uma das pessoas que é sua vizinha no círculo. Esta pessoa então se levanta e deixa o círculo. Vence o último jogador que permanecer no círculo. Mostre que um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora e apresente-a.

Problema 4. Alice lançou o seguinte desafio a Betina. Ela irá desenhar um retângulo em um quadro-negro. Betina tentará então desenhar uma reta que divida o retângulo em duas partes de mesma área e, ao mesmo tempo, o quadro-negro em duas partes de mesma área. Se Betina conseguir desenhar a reta, ela vence; caso contrário, Alice vence. Quem vencerá o desafio?

Problema 5. (Torneio das Cidades 2003) Alessandra e Beto colorem em turnos alternados os lados de um polígono de n lados. Em sua vez, Alessandra pode colorir qualquer lado que tem 0 ou 2 vértices em comum com lados já coloridos. Beto pode colorir qualquer lado que tem exatamente 1 vértice em comum com lados já coloridos. Perde o jogador que não puder colorir nenhum lado em sua vez. Para quais valores de n Beto tem a estratégia vencedora?

Problema 6. (Centro-americana 2004) Em um quadro-branco, os números de 1 a 9 estão escritos. Artur e Bento jogam o seguinte jogo em turnos, Artur sendo o primeiro. Em sua vez, cada jogador escolhe um dos números escritos no quadro-branco e apaga, além dele, todos os seus múltiplos que ainda estão escritos no quadro. Perde quem remover o último número. Determine se algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora e justifique.

Problema 7. (Alemanha 2009) No início de um jogo há três caixas com $2008, 2009$ e 2010 pedras. Amanda e Bianca jogam in turnos seguindo a seguinte regra:

Quando é o seu turno, escolha duas caixas. Esvazie-as e depois distribua as pedras da terceira caixa entre as três caixas, de maneira que nenhuma caixa fique vazia. Se você não puder fazer isto, você perde o jogo.

Quem tem a estratégia vencedora quando Amanda joga primeiro?

Problema 8. (OBM 2010 adaptado) Arnaldo e Bernaldo participam do seguinte jogo em um tabuleiro $m \times n$, m, $n \geq 2$. Arnaldo começa escolhendo uma casinha e colocando um cavalo na casinha escolhida; em seguida, Bernaldo e Arnaldo movem alternadamente o cavalo, começando por Bernaldo, com a restrição de que o cavalo não pode cair em casinhas que já foram visitadas. Perde quem não poder mover o cavalo. Determinar qual jogador tem uma estratégia para ganhar o jogo, não importando os movimentos do outro jogador e mostrar como ele deve jogar para ganhar, quando:

a) $m = 2$ e $n \geq 2$.

b) $m = 3$ e $n = 4$.

Observação: Cada movimento de um cavalo consiste em ir duas casas na vertical ou na horizontal e, em seguida, uma casa na direção perpendicular.

Problema 9. Existem 1001 degraus em uma escadaria que sobe uma colina, com pedras em alguns desses degraus (não mais que uma pedra por degrau). Sísifo pode pegar qualquer pedra e leva-lá um ou mais degraus acima até o degrau vazio mais próximo. Em seguida, seu rival Hades, rola uma pedra (com um degrau vazio diretamente abaixo dela) um degrau para baixo. Existem 500 pedras, originalmente localizadas nos primeiros 500 degraus. Sísifo e Hades movem as pedras em turnos, começando por Sísifo. Seu objetivo é mover uma pedra para o degrau mais alto. Hades é capaz de detê-lo?

Problema 10. (Centro-americana 2003) Dois jogadores, Alfredo e Bernardo, jogam em turnos alternados o seguinte jogo. No início, há uma pilha com 2003 pedras. No seu primeiro turno, Alfredo escolhe um divisor de 2003 e remove este número de pedras da pilha. Em sua vez, Bernardo escolhe um divisor do número de pedras restantes e remove este número de pedras da nova pilha. Daí por diante, eles repetem esta mesma regra, alternando seus turnos. O jogador que remover a última pedra perde. Mostre que um deles tem uma estratégia vencedora e a descreva.

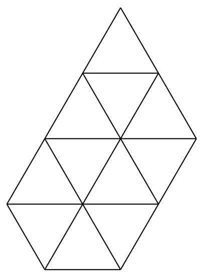
Problema 11. (Tuymaada 2019) André, Bete, Carlos e Daniel jogam em um tabuleiro 1000×1000. Eles jogam em turnos: André primeiro, depois Bete, depois Carlos, finalmente Daniel, e depois disso André novamente e assim por diante. Em cada turno, cada jogador deve pintar casas do tabuleiro formando um retângulo 2×1, 1×2, 1×3, ou 3×1. O jogador que não conseguir jogar perde. Prove que existem três jogadores que podem cooperar de maneira que o outro sempre perca.

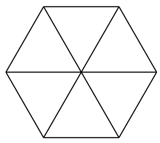
Problema 12. (Holanda 2010) Antônio e Benjamin disputam um jogo usando 2010 moedas. Ao longo do jogo, as moedas são divididas em várias pilhas com ao menos uma moeda em cada uma. Uma jogada consiste em escolher uma ou mais pilhas e dividir cada uma delas em duas pilhas menores (logo pilhas de apenas uma moeda não podem ser escolhidas). Inicialmente há apenas uma pilha contendo todas as 2010 moedas. Antônio e Benjamin jogam em turnos alternados começando por Antônio. Perde quem não puder fazer mais jogadas. Mostre que Antônio pode vencer o jogo, independente de como Benjamin joga.

Problema 13. (Torneio das cidades 2003) Uma barra de chocolate no formato de um triângulo equilátero cujos lados tem comprimento igual a n consiste de pedacinhos triangulares equiláteros menores, de lados paralelos ao lados da barra e com comprimento igual a 1. Dois jogadores, Ana e Bruno, revezam-se em turnos comendo a barra de chocolate, começando por Ana. Na sua vez, ela ou ele parte um pedaço triangular da barra, come-o e passa o restante para o outro jogador. Enquanto a barra tiver mais de um pedacinho triangular, nenhum jogador pode comê-la inteiramente.

Perde quem não conseguir jogar ou deixar apenas um pedacinho para seu oponente. Para cada valor de n natural, determine quem tem a estratégia vencedora.

OBS: Partir um pedaço triangular da barra significa escolher uma linha respeitando a fronteira dos pedacinhos e cortar a barra ao longo desta, removendo uma das duas partes e esta tem que ser triangular. Por exemplo, na figura à esquerda há apenas duas maneiras de partir a barra, já na figura à direita não é mais possível.





Problema 14. Um plano infinito está dividido em quadrados por dois conjuntos de linhas paralelas. Alex e Bianca disputam o seguinte jogo: Alex escolhe um quadrado e o pinta de vermelho, depois Bianca escolhe um quadrado ainda não pintado e o pinta de azul, depois Alex escolhe um quadrado não pintado e o pinta de vermelho, e assim por diante alternado os turnos. O objetivo de Alex é pintar de vermelho quatro quadrados cujos centros formam um quadrado com lados paralelos às retas dos dois conjuntos de retas paralelas. O objetivo de Bianca é impedir isso. Alex pode vencer?

Problema 15. (Espanha 2020) Ana e Bento se enfrentam em um jogo que dura 2020 turnos. Inicialmente, existem 2020 cartas em uma mesa, numeradas de 1 a 2020, e Ana possui uma carta extra com o número 0. No k-ésimo turno, o jogador que não possui a carta $k-1$ escolhe entre pegar a carta com o número k ou entregá-la a seu oponente. O número em cada carta indica seu valor em pontos. No fim do jogo vence quem tiver mais pontos. Determine se algum jogador tem estratégia vencedora ou se os jogadores podem forçar um empate e descreva a estratégia.

Problema 16. (OBM 2007) Quadradinhos iguais estão arrumados formando um tabuleiro $n \times n$. Ludmilson e Ednalva jogam o seguinte estranho jogo. Cada jogada de Ludmilson consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2×2. Cada jogada de Ednalva consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Ludmilson e Ednalva jogam alternadamente, sendo Ludmilson o primeiro a jogar. Quando Ludmilson não puder fazer sua jogada, então Ednalva fica com todas as peças restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. Diga se é possível que Ednalva ganhe o jogo, não importando como Ludmilson jogue, em cada um dos seguintes casos:

a) $n = 10$.

b) Caso geral (n qualquer).

Problema 17. São dadas 2000 pedras em uma mesa. Ágata e Berenice jogam um jogo em turnos, Ágata sendo a primeira. A regra é:

1. A cada turno, a jogadora poder retirar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras da mesa.

2. Elas não podem retirar o mesmo número de pedras que a jogadora anterior retirou.

Quem retirar a última pedra vence. Quem tem a estratégia vencedora? Prove.

Problema 18. (Lusófona 2015) No centro de um quadrado há um coelho e, em cada um dos vértices, um lobo. Os lobos se movem ao longo das arestas do quadrado e o coelho se move livremente no plano. Sabendo que o coelho tem velocidade igual a 10 Km/h e os lobos tem velocidade máxima de 14 Km/h, determine se existe alguma estratégia que permita ao coelho escapar do quadrado sem ser capturado por algum dos lobos.

Problema 19. (Torneio das cidades 2007 - adaptado) A audiência faz uma fila com n moedas. A sequência de caras e coroas é escolhida de forma arbitrária por ela. A audiência também escolhe um número de 1 a n inclusive. Após isso, a assistente vira uma das moedas e a mágica é trazida de volta ao palco para examinar a sequência resultante. Por causa de um esquema combinado anteriormente com a assistente, a mágica tenta determinar qual foi o número escolhido pela audiência. Prove que se elas tem uma estratégia que funciona para n, elas tem uma estratégia que funciona para $2n$.

Problema 20. (Rússia 2007) Dois jogadores alternam turnos desenhando diagonais em um polígono regular de $2n + 1$ lados ($n > 1$). É proibido desenhar uma diagonal que já foi desenhada ou que cruza um número ímpar de diagonais já desenhadas. Quem não puder mais fazer sua jogada perde. Quem tem a estratégia vencedora?

Soluções

Em todas as soluções A indica o jogador cujo nome começa com a letra A e B indica o jogador cujo nome começa com a letra B. Em um único problema usamos C e D de maneira análoga.

1. Para vencer, basta Bruna jogar sempre de forma simétrica a Andressa em relação ao centro do círculo. Por simetria, isto sempre é possível (note que após cada jogada de Bruna o arranjo das moedas é simétrico em relação ao centro). Dessa forma, enquanto A puder jogar, B também pode e assim A nunca remove a última moeda.

2. A tem a estratégia vencedora. A primeira posição perdedora é 10. Forçosamente o jogador tem que entregar 9 a seu oponente e então este vence automaticamente. Note que 11, 12, ..., 19 são posições vencedoras, pois a partir delas é possível entregar 10 a seu oponente. O mesmo argumento utilizado para 10 mostra que 20 também é uma posição perdedora. Um padrão começa a aparecer.

A estratégia de A é sempre passar para B um número terminado em 0, por fim passando o próprio número 0 e vencendo assim o jogo. Ele sempre pode fazer isso pois pode fazer inicialmente $2019 - 9 = 2010$ e, daí em diante, se B recebeu n um número que termina em 0, qualquer movimento que B fizer devolve para A um número com último dígito diferente de 0; A então subtrai este último dígito do número que lhe foi repassado por A, realizando assim sua estratégia.

3. A vence. A estratégia é sempre manter entre ela e B um número ímpar de pessoas, em ambas direções. Isto sempre é possível pois em seu turno sempre há um número ímpar de pessoas no círculo. Logo o número de pessoas entre eles é par em apenas uma das direções. Se este número for igual a 0, A toca B no ombro e vence. Caso contrário, A toca seu vizinho nesta direção no ombro, repassando para B uma configuração na qual entre ela e B há um número ímpar de pessoas em ambas direções. Note que B nunca vence o jogo, pois há sempre pelo menos uma pessoa entre A e ele. Assim, como o jogo termina, já que o número de pessoas no círculo sempre diminui de 1, em algum momento A faz o último movimento, vencendo o jogo.

4. Betina vence. Basta traçar a linha reta que liga o centro do quadro-negro ao centro do retângulo. Esta linha divide ambas figuras em duas partes congruentes, por simetria, logo de mesma área.

5. Este é um problema que envolve a ideia de criar um banco de possíveis jogadas para o futuro. A vence sempre que $n > 4$. Sua estratégia é a seguinte.

Depois que ambos realizarem sua primeira jogada, haverá dois lados adjacentes pintados, um por A e outro por B. A então colore um dos lados que está a um lado de distância desse par de lados coloridos. Por exemplo, se A_1A_2 e A_2A_3 são os lados coloridos do polígono, A colore A_4A_5 ou $A_{n-1}A_n$ (note que se $n = 5$ estes dois lados são na verdade o mesmo lado). Observe que, devido a natureza da regra imposta à B, ao fazer isto, A cria (ao menos) um lado "banco", que poderá ser colorido *somente por ela* no futuro (caso colora A_4A_5 este lado é A_3A_4). B então faz sua jogada, se puder. Daí em diante, a estratégia de A é colorir um dos lados que está a um lado de distância do conjunto de lados já coloridos. Observe que cada vez que A segue esta estratégia, ela cria mais um lado "banco".

Por indução, após o turno de cada um dos jogadores, o conjunto dos lados coloridos e dos lados "banco" é um arco conexo no polígono, ou seja, um conjunto de lados consecutivos. Se, após a jogada de B, a jogadora A não puder seguir esta estratégia, então este arco satisfaz uma das seguintes possibilidades

- cobre todos menos um dos lados do polígono: neste caso A colore este lado ainda não colorido e vence.

- cobre todos menos dois lados do polígono: sejam l_1 e l_2 estes lados. Neste caso A colore um dos lados "banco" que ela havia guardado para mais tarde. B então forçosamente colore um dos dois lados l_1 ou l_2, sem perda de generalidade l_1. Em seu último turno A, colore o lado l_2.

OBS: note que o arco não pode cobrir todo o polígono, pois neste caso B teria colorido por último um lado cujos dois vértices pertenceriam também a dois lados já coloridos.

Se $n = 3$, é fácil ver que A vence automaticamente. Se $n = 4$ é claro que B vence automaticamente. Assim, Beto vence apenas quando $n = 4$.

6. A tem estratégia vencedora. Note que quem tiver que apagar o número 1 perde automaticamente. Sua primeira jogada é apagar 4 e 8. Daí em diante dividimos em casos:

- Se B apaga 2 e 6, os números restantes são 1, 3, 5, 7 e 9. A apaga então 3 e 9, deixando para B os números 1, 5 e 7. Daí em diante eles apagam um número por vez, B sendo forçado a apagar o 1 no final.

- Se B apaga os números 3, 6 e 9. Os números restantes são 1, 2, 5 e 7, que são apagados um por vez, até que B forçosamente apaga o número 1 no final.

- Se B apagar 5 ou 7, então A apaga 3, 6 e 9. Restam os números 1, 2, 5 ou 7. Eles são apagados um por vez (são três números!), B sendo forçado a escolher 1 no final.

- Se B apagar 6 ou 9, então A apaga 9 ou 6 respectivamente. Após isto, ficam no quadro 1, 2, 3, 5 e 7, sendo apagados um de cada vez. Ao fim, B é forçado a apagar o dígito 1.

7. Para resolver este problema analisaremos posições vencedoras e perdedoras. Diremos que um número n é vencedor quando o jogador que receber alguma caixa com n pedras tiver uma estratégia vencedora escolhendo esta caixa e esvaziando as demais. Diremos que n é perdedor quando o jogador que escolher uma caixa com n pedras forçosamente entrega a seu oponente uma caixa com um número vencedor de pedras ou simplesmente não consegue fazer sua jogada.

Os números 1 e 2 são perdedores, pois não se pode fazer uma jogada escolhendo caixas com estes números de pedras. Por outro lado, 3, 4, 5 e 6 são vencedores, pois uma caixa que tem qualquer um dentre estes números de pedras pode ser dividida em 3 caixas com 1 ou 2 pedras. Segue que 7 e 8 são números perdedores, pois qualquer divisão entre 3 caixas de uma pilha com 7 ou 8 pedras envolve ao menos uma caixa com 3, 4, 5 ou 6 pedras. Por outro lado 9 é vencedor, por causa da divisão $1 + 1 + 7 = 9$.

Afirmamos que n é vencedor quando $n = 6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$ ou $6k + 6$ e perdedor quando $n = 6k + 1$ ou $6k + 2$ para cada $k \geq 0$ inteiro. A prova é por indução forte. O caso base já está feito. O passo indutivo é o seguinte. Se $n = 6(k + 1) + 1$ ou $6(k + 1) + 2$ pedras estão divididas em três caixas não-vazias com a, b e c pedras, então um destes valores não deixa resto 1 ou 2 quando dividido por 6. De fato, se todos deixassem resto 1 ou 2, então $a + b + c = n$ seria um número do tipo $6k' + d$ com d entre $1 + 1 + 1 = 3$ e $2 + 2 + 2 = 6$. Mas $n = 6k' + 1$ ou $6k' + 2$, contradição. Sendo assim, pela hipótese de indução forte, uma das caixas tem um número vencedor de pedras após a divisão. Em contrapartida,

$$6(k+1)+3 = 1+1+[6(k+1)+1], \quad 6(k+1)+4 = 1+2+[6(k+1)+1],$$
$$6(k+1)+5 = 2+2+[6(k+1)+1], \quad 6(k+1)+6 = 2+2+[6(k+1)+2],$$

e portanto todos estes números são vencedores.

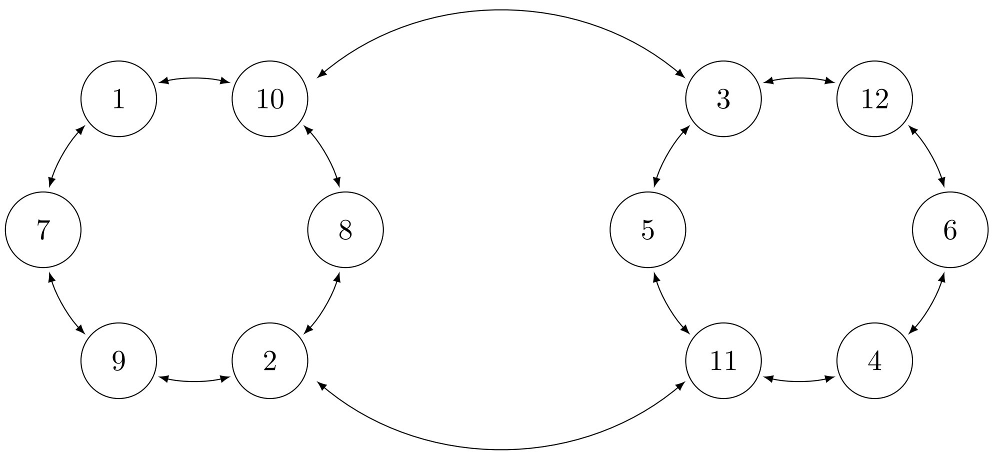
Como 2010 é múltiplo de 6, A vence.

8. a) Se n não for múltiplo de 4, A vence; caso contrário, B vence. Se $n = 4k + 1$, A coloca o cavalo em qualquer casa da primeira coluna. Se $n = 4k + 2$ ou $4k + 3$, A coloca o cavalo em qualquer casa da segunda coluna. Note que daí em diante cada jogador tem apenas uma jogada disponível, sempre movendo o cavalo duas casas na horizontal para a direita. No primeiro caso, após um número ímpar de rodadas, A deixa o cavalo na última coluna do tabuleiro e B perde. O outro caso é semelhante, e após um número ímpar de rodadas, A deixa o cavalo ou na última coluna do tabuleiro ou na penúltima coluna respectivamente e B perde.

Quando n é múltiplo de 4, se A colocar o cavalo na primeira coluna, assim como antes, sempre há apenas um movimento possível, contudo, após um número par de rodadas, B deixa o cavalo na penúltima coluna e A perde. Analogamente, se A colocar o cavalo na segunda coluna, os movimentos são inevitáveis e ao fim B põe o cavalo na última coluna. Por simetria, A também perde ao colocar o cavalo na última ou penúltima coluna.

Por outro lado, se A põe o cavalo em qualquer outro lugar, a distância dele para a primeira coluna e a distância para a última coluna são maiores que 2. Uma das duas tem que ser também do tipo $4k+2$ ou $4k+3$, pois a soma destes dois valores é do tipo $4k+3$. Suponha sem perda de generalidade que seja para a última coluna. B então move o cavalo para a direita, e daí em diante sempre há apenas um movimento possível. Após um número par de turnos, coloca o cavalo na última ou na penúltima posição, quando a distância é igual a $4k + 3$ e $4k + 2$ respectivamente, vencendo o jogo.

b) Numerando as casas do tabuleiro de 1 a 12, obtemos o seguinte grafo que representa os possíveis movimentos do cavalo:



Podemos supor sem perda de generalidade que A põe o cavalo no ciclo da esquerda. Nesse caso B move o cavalo dentro deste ciclo. Como ele tem 6 casas, se o cavalo nunca sai dele, B faz o último movimento e vence. Caso A leve o cavalo para o outro ciclo, B passa a movimentar o cavalo naquele ciclo e vence movendo o cavalo dentro deste círculo. Note que A não pode retornar ao ciclo anterior, pois um número par de jogadas o separa da outra posição conectada ao ciclo da esquerda.

9. Hades pode impedir Sísifo de completar seu objetivo. Sua estratégia é bastante simples. Sempre que Sísifo move uma pedra existem duas possibilidades: ou ele a move para exatamente um degrau acima ou ele a move vários degraus para cima. No primeiro caso, Hades simplesmente empurra a pedra que Sísifo moveu um degrau para baixo novamente, fazendo com que ela retorne para a posição anterior. No segundo caso, obrigatoriamente, havia uma pedra ocupando o degrau imediatamente acima daquele que continha a pedra que Sísifo escolheu. Hades move então esta pedra para baixo, ocupando o degrau vazio que Sísifo havia deixado.

Mostremos que esta estratégia permite a Hades vencer. Após cada jogada de Hades, o primeiro degrau sempre estará ocupado, já que qualquer degrau desocupado por Sísifo é preenchido por Hades logo depois. Além disso, após sua jogada, não existem dois degraus consecutivos vazios abaixo daquele que contém a pedra mais alta. Isto pode ser provado por indução. No início, de fato, tal configuração não existe.

Por outro lado, suponha que Sísifo parte de uma configuração em que não existe tal par de degraus. Se ele move a pedra exatamente um degrau para cima, após a jogada de Hades voltamos para a configuração anterior, para a qual não existe tal par. Suponha então que ele a move vários degraus para cima. Considere a maior sequência de degraus consecutivos *a partir do escolhido por Sísifo* tal que todos continham uma pedra. Denote a por d_k, d_{k+1}, ..., d_l. Após a jogada de Hades, obtemos uma configuração quase idêntica à anterior, a única diferença é que o bloco de degraus consecutivos *acima do degrau escolhido por Sísifo* que continham uma pedra, d_{k+1}, ..., d_l, foi movido um degrau para cima. Isto cria um degrau vazio acima daquele escolhido por Sísifo e diminui em 1 o espaço vazio acima desta sequência. Em todo caso, o par de degraus consecutivos vazios não é criado, o que conclui a indução.

Consequentemente, após cada jogada de Hades, a pedra mais alta está no máximo no degrau número 999. Logo, em sua vez, Sísifo pode levar uma pedra no máximo para a posição 1000, mas nunca para o topo da escada.

10. B tem a estratégia vencedora. Note que todo divisor de um número ímpar é também ímpar. Logo, todo jogador que receber uma quantidade ímpar de pedras repassa uma quantidade par para seu oponente. Assim, após a primeira jogada de A, B recebe uma pilha com um número par de pedras. A estratégia de B é sempre remover exatamente uma pedra da pilha. Por indução , B sempre repassa para A uma pilha com um número ímpar de pedras e logo após recebe de volta de A uma pilha com um número par de pedras. Dessa maneira, ou B pode jogar ou recebe uma pilha sem pedras, o que significa que ele venceu.

11. A, B e D podem cooperar para derrotar C. A estratégia é a seguinte. Na primeira jogada de A e B, eles pintam retângulos 2×1 de forma a pintar os quatro quadradinhos centrais do quadrado. Após cada jogada de C, os jogadores D, A e B pintam o retângulo obtido rodando aquele escolhido por C a partir do centro em 90°, 180° e 270° respectivamente. Por simetria, sempre que C puder jogar os outros 3 também podem. Assim, após várias jogadas, ele será o primeiro a não conseguir jogar, perdendo o jogo.

12. A vence o jogo. Sua estratégia é sempre entregar para B várias pilhas, cada uma delas com um número ímpar de moedas. Como $2010 = 1 + 2019$, seu primeiro movimento está garantido. Em geral, toda pilha com um número par de moedas n pode ser dividida em duas com um número ímpar de moedas, por exemplo 1 e $n - 1$.

Suponha agora que B recebeu de A várias pilhas, todas elas com um número ímpar de moedas. Se B ainda puder fazer uma jogada, ele tem que pegar ao menos uma das pilhas, que tem um número ímpar maior que 1 de moedas, e dividi-la em duas. Ao fazer isto cria ao menos uma pilha com um número par, e maior que 1, de moedas. Na vez de A novamente, ele pega *todas* pilhas com uma quantidade par de moedas que recebeu de B (note que há ao menos uma) e separa cada uma delas em duas que tem uma quantidade ímpar de moedas, executando assim sua estratégia.

Portanto, enquanto B puder jogar A também poderá jogar. Note que o jogo termina após no máximo 2009 jogadas, pois o número de pilhas aumenta em 1 após cada jogada. Logo A vence.

13. Se n é primo, Bruno tem uma estratégia vencedora; caso contrário, Ana tem.

Seja n um número primo. Em sua primeira jogada, A remove um triângulo de lado k, deixando a B um trapézio de lados $(k, n-k, n-k, n)$. Sejam $a = \max(k, n-k)$ e $b = \min(k, n-k)$, Note $mdc(a, b) = mdc(n, n-k) = 1$. B então come um triângulo de lado $n-k$, deixando a A um paralelogramo de lados a e b. Sempre que A receber um paralelogramos com lados c e d satisfazendo $mdc(c, d) = 1$ e $d \leq c$, analisemos as possíveis jogadas.

1. Se A come um triângulo de lado menor que d, B repete sua jogada de forma simétrica (em relação ao centro do paralelogramo) na outra ponta, e vence o jogo, pois A fica sem jogadas.

2. Se A come um triângulo com lado d e $c \neq d$, B recebe um trapézio de lados $(c-d, d, c, d)$, tal que $mdc(c-d, d) = mdc(c, d) = 1$. B então repete sua estratégia anterior, come um triângulo de lado d e devolve para A o paralelogramo de lados $c-d$ e d, colocando-a de volta na mesma situação.

3. Se A come um triângulo com lado d e $c = d$, então $c = d = 1$ e B recebeu um pedacinho triangular de tamanho 1. Isto significa que A perdeu o jogo.

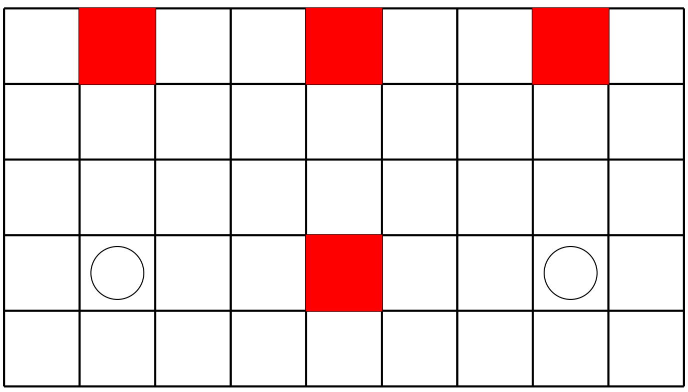
Depois de um certo número de jogadas, o caso 2 acima não acontece e portanto B vence.

Em contrapartida, seja n um número composto e p algum divisor primo de n, de maneira que $n = kp$. A inicia comendo um triângulo de tamanho p.

1. Se B comer um triângulo com lado diferente de $n-p$, A quebra um pedaço de tamanho 1 no terceiro vértice e vence, pois B fica sem jogadas possíveis.

2. Se B comer um triângulo de lado $n-p$, A recebe de volta um paralelogramo de lados p e $(k-1)p$. Sendo assim, A come novamente um triângulo de lado p, devolvendo a B um trapézio de lados $(p, (k-2)p, p, (k-1)p)$. Se B comer um triângulo de lado diferente de p, A come um triângulo de tamanho 1 e deixa B sem jogadas possíveis. Dessa maneira, A e B alternam seus turnos, A sempre recebendo de B um paralelogramo de lados p e lp, e repassando a B um trapézio de lados $(p, lp, p, (l-1)p)$, até que ao fim repassa a B um triângulo de lados p. Mas neste caso, de acordo com o provado anteriormente, quem faz a segunda jogada vence, ou seja, A vence.

14. A vence. Para construirmos sua estratégia, analisemos como tem que ser o final do jogo. No turno anterior a vitória de A, B pintou um quadradinho. Como B joga de forma inteligente, se ela não conseguiu evitar a vitória de A, então, na sua última vez, haviam dois quadradinhos que poderiam ser pintados de vermelho para que A vencesse. Este tipo de situação acontece quando os quadradinhos formam um T, como indicado na figura abaixo.



Note que se B recebe esta posição e não tiver coberto previamente nenhum dos quadradinhos marcados com um círculo, perde no próximo turno, pois pode cobrir no máximo um deles. Vamos mostrar como A pode criar este tipo de situação. Sejam A_i os quadradinhos marcados por A e B_i aqueles marcados por B em cada um dos seus turnos $i = 1, 2, \ldots$.

Inicialmente A marca qualquer quadrado A_1 e B marca outro B_1. Depois disso, A escolhe outro quadrado A_2 na mesma linha que A_1 e à sua direita de maneira que o marcado por B_1 esteja ao menos 1000 vezes (exagero) mais próximo de A_1, tanto na direção horizontal, quando na vertical, e que entre A_1 e A_2 exista um número ímpar de quadradinhos. Temos agora que analisar algumas opções.

1. B pinta seu segundo quadradinho B_2 na mesma coluna que um dos quadrados A_1 ou A_2, de maneira que a distância entre B_2 e o quadradinho A_i na mesma coluna seja igual a distância entre A_1 e A_2: A faz sua terceira jogada escolhendo A_3 como sendo o quadrado médio entre A_1 e A_2. Note que a partir daí, independente da escolha B_3, em seu quarto turno A pode marcar um dos dois quadradinhos na mesma coluna de A_3, cuja distância a A_3 é igual distância de A_3 a A_2, de forma a completar a figura T acima ou sua reflexão em relação ao eixo horizontal.
2. Caso contrário e
   a. B_2 está na mesma coluna que A_1 ou à sua direita: A marca A_3 na mesma linha que A_1, à sua esquerda, de maneira que a distância entre A_3 e A_1 seja a mesma que àquela entre A_1 e A_2. Assim como no caso anterior, independente da escolha B_3, em seu quarto turno A pode marcar um dos dois quadradinhos na mesma coluna de A_1, cuja distância a A_1 é igual distância de A_3 a A_1, de forma a completar a figura T acima ou sua reflexão em relação ao eixo horizontal.
   b. B_2 está à esquerda A_1: A marca A_3 na mesma linha que A_2, à sua direita, de maneira que a distância entre A_3 e A_2 seja a mesma que àquela entre A_1 e A_2. Daí em diante a análise é análoga ao caso anterior.

15. Eles podem forçar um empate. Note que a escolha de cada jogador nada mais é que o momento em que decide "passar a vez", ou seja, o poder de escolha, para o outro jogador. Seja $a(k)$ e $b(k)$ o número de pontos de A e B respectivamente após k-ésimo turno. Afirmamos que se no k-ésimo turno A não possuir a carta $k-1$, então qualquer sequência de jogadas que ela fizer antes de passar a vez para B aumenta a diferença $a(k) - b(k)$ em no máximo 1. Com efeito, se ela passar a vez ao pegar a carta $k + l$, isto significa que ela deu as cartas k, $k + 1$, ..., $k + l - 1$ para B. A diferença

$$[a(k+l) - b(k+l)] - [a(k) - b(k)] = k + l - [k + (k+1) + \cdots + (k+l-1)] = \left(1 - \frac{l-1}{2}\right) l - (l-1)k$$

é positiva se, e somente se, $l = 1$. Além disto, neste caso ela é exatamente 1. Consequentemente, por simetria, a melhor estratégia para ambos jogadores é passar o número k a seu rival e pegar $k+1$ para si. Contudo, isto implica que cada um joga um número par de vezes, pois 2020 é múltiplo de 4, e ao fim do jogo as pontuações deles serão iguais (1020605).

16. a) Ednalva não pode impedir Ludmilson de vencer. Divida o tabuleiro em 25 quadrados 2×2. Na sua vez, ele sempre remove um destes quadrados do tabuleiro. Mesmo que Ednalva escolha em cada turno remover um quadradinho 1×1 de um quadrado 2×2 ainda intocado, após 12 jogadas de cada um deles, ainda restará um quadrado 2×2 para Ludmilson remover. Dessa maneira, ele sempre remove ao menos $4 \times 13 = 52$ quadradinhos e vence.

b) Se n é par, assim como na parte anterior, Ednalva não vencerá. Sendo $n = 2k$, dividimos o tabuleiro em k^2 quadrados 2×2. A estratégia é sempre remover um deles a cada vez. Assim como na parte anterior, ao fim ele remove ao menos $4\lceil \frac{k^2}{2} \rceil$ quadradinhos 1×1 e Ednalva no máximo $4\lfloor \frac{k^2}{2} \rfloor$.

Se $n = 2k+1$ é ímpar, Ednalva tem a estratégia vencedora. Considere as colunas e as linhas enumeradas de 1 a n e pinte os quadradinhos 1×1 correspondentes as interseções de uma coluna par com uma linha par, num total de k^2 quadradinhos. Note que todo quadrado 2×2 contém exatamente um quadradinho pintado. A estratégia de Ednalva é sempre remover um quadradinho pintado. Isto garante que Ludmilson remove no máximo $\lceil \frac{k^2}{2} \rceil$ quadrados 2×2. Em contrapartida, ela remove todos os outros. Como $8\lceil \frac{k^2}{2} \rceil \leq (2k+1)^2$, Ednalva é a vencedora.

17. Apesar do conjunto de jogadas permitidas a uma jogadora após receber uma pilha com n pedras depender da jogada anterior de sua oponente, resolveremos este problema através da ideia de análise de posições perdedoras. Note que isto causa certa complicação, pois, se A recebe uma pilha com 8 pedras e repassa 3 a B, esta vence removendo todas as pedras. Por outro lado, se A recebe uma pilha com 6 pedras e repassa 3 a B, esta é forçada a remover 1 ou 2 pedras da pilha, perdendo logo em seguida. Não podemos então dizer que 3 é posição vencedora, nem perdedora, pois tudo depende de qual jogada foi realizada previamente pela oponente.

Chamaremos então um número n de posição perdedora quando, *independentemente da jogada anterior da sua rival*, a jogadora que receber n pedras não for capaz de impedir a vitória de sua oponente. Uma posição perdedora pequena é 7. De fato, se a jogadora X receber 7 pedras, tem (no máximo) as seguintes opções:

- remover a pedras, $a = 2, 3, 4, 5$: como resposta, sua oponente Y remove as outras $7-a$ pedras, já que $7-a \neq a$.

- remover 1 pedra: Sua oponente Y recebe 6 pedras e remove 3 delas. Como X não pode remover as 3, por causa da regra do jogo, é forçada a remover a pedras, $a = 1, 2$; e então Y vence removendo as outras $3-a \neq a$ pedras.

Observe que talvez apenas a primeira opção esteja disponível, caso no turno anterior existissem 8 pedras na pilha. Mas isto não faz diferença, para nós basta mostrar que X perde em todos os casos possíveis. Analogamente, 13 é outra posição perdedora. Com efeito, se X recebe 13 pedras, tem (no máximo) as seguintes opções:

- remover a pedras, $a = 1, 2, 4, 5$: como resposta, sua oponente Y remove as outras $6-a$ pedras, repassando para X um total de 7 pedras, situação que já sabemos ser perdedora.

- remover 3 pedras: Sua oponente Y recebe 10 pedras e remove 5 delas. Como X não pode remover as 5 que sobram, por causa da regra do jogo, é forçada a remover a pedras, $a = 1, 2, 3, 4$; e então Y vence removendo as outras $5-a \neq a$ pedras.

Este padrão se repete, e iremos provar por indução que, para todo $m \in \mathbb{N}$, os números $13m$ e $13m+7$ e são posições perdedoras. O caso $m = 0$ já está feito (0 é posição perdedora por causa da condição de vitória). O passo indutivo é, basicamente, o mesmo argumento acima.

Com efeito, se X recebe $13m+13$ pedras tem as seguintes opções:

- remover a pedras, $a = 1, 2, 4, 5$: como resposta, sua oponente Y remove $6-a$ pedras, repassando para X um total de $13m+7$ pedras, situação perdedora pela hipótese de indução.

- remover 3 pedras: Sua oponente Y recebe $13m+10$ pedras e remove 5 delas. Como X não pode remover 5, por causa da regra do jogo, é forçada a remover a pedras, $a = 1, 2, 3, 4$. Em seguida Y remove $5-a \neq a$ pedras e devolve a X um total de $13m$ pedras, posição perdedora pela hipótese de indução.

Ademais, se X recebe $13m+20$ pedras, tem as seguintes opções:

- remover a pedras, $a = 2, 3, 4, 5$: como resposta, sua oponente Y remove $7 - a$ pedras, já que $7 - a \neq a$, devolvendo a X um total de $13m+13$ pedras, posição perdedora pela hipótese indutiva.
- remover 1 pedra: Sua oponente Y recebe $13m + 19$ pedras e remove 3 delas. Como X não pode remover 3, por causa da regra do jogo, é forçada a remover a pedras, $a = 1, 2, 4, 5$. Se escolheu $a = 1$ ou 2, Y remove $3 - a \neq a$ pedras e repassa a X um total de $13m + 13$ pedras, posição perdedora pelo provado acima. Caso tenha escolhido $a = 4$ ou 5, Y remove $9 - a \neq a$ pedras, repassando a X um total de $13m + 7$ pedras, posição perdedora pela hipótese.

Consequentemente, 1996 é uma posição perdedora, e A vence removendo 4 pedras em sua primeira jogada.

18. Este é um exemplo de jogo de fuga e nestes tipos de problemas a solução passa por considerações geométricas. A condição do enunciado pode ser trocada pela condição $v_{lobo} < v_{coelho} \cdot \sqrt{2}$ e o fato de ser estritamente menor é importante. Tendo isto em mente, seja $a = v_{lobo}/v_{coelho} < \sqrt{2}$. Quando o coelho percorre x, os lobos percorrem no máximo $a \cdot x$.

No fim o coelho escapa usando a seguinte estratégia. Seja L o comprimento do quadrado $ABCD$ em questão. Note que

$$b = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

é positivo, porque $a < \sqrt{2}$. Inicialmente, o coelho corre em linha reta na direção de um dos vértices do quadrado, sem perda de generalidade A. Quando atingir um ponto P cuja distância aos lados adjacentes AB e AD for igual a c, um valor qualquer menor que b, ele observa a posição do lobo l_1, que estava no vértice A no princípio. Sejam Q e R as interseções da perpendicular a AP por P com os lados AB e AD do quadrado respectivamente. Afirmamos que, se l_1 não estiver no interior do lado AB, o coelho corre para o ponto Q e foge; se l_1 não estiver no interior do lado AD, o coelho corre para o ponto R e foge.

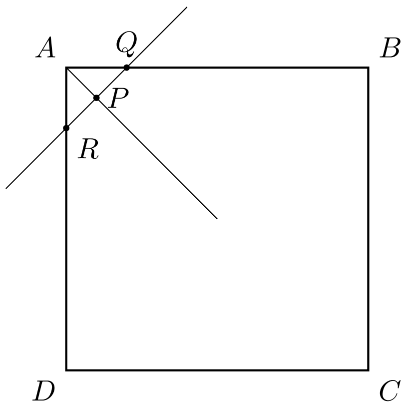


Figura mostrando a localização dos pontos P, Q e R.

Com efeito, no primeiro caso, indo de P até alcançar o ponto Q, o coelho percorre uma distância igual a $c\sqrt{2}$. Como a distância de A a Q é igual a $2c > ac\sqrt{2}$, l_1 não alcança o coelho (note que ele tem que estar no lado AD). Mais ainda, até alcançar o ponto Q, o coelho percorre desde o princípio uma distância igual a $L\sqrt{2}/2$. Isto significa que os outros lobos andaram no máximo $a \cdot L\sqrt{2}/2$. Como

$$2c + a \cdot L\frac{\sqrt{2}}{2} < 2b + a \cdot L\frac{\sqrt{2}}{2} = L,$$

nenhum dos outros lobos consegue chegar até o ponto Q a tempo de capturar o coelho (pois suas distâncias originais a A eram de ao menos L e AQ tem comprimento $2c$). A análise do outro caso é totalmente análoga. Como l_1 não pode estar ao mesmo tempo no interior de AB e no interior de AD, o coelho foge.

19. Neste problema, não estamos diante de uma ideia de um jogo em turnos, nem de um jogo entre rivais, mas sim de um jogo cooperativo. O que ele nos pede é mostrar que se o número n é uma posição vencedora para os jogadores, o número $2n$ também é. Nosso objetivo então é mostrar que a partir de uma estratégia vencedora para n, podemos construir uma estratégia vencedora para $2n$.

Primeiramente, vamos entender de maneira abstrata o que significa uma estratégia vencedora para n. O papel da mágica é, a partir de uma sequência de n caras e coroas, determinar o número escolhido pela audiência. Isto significa que ela e sua assistente tem (em suas cabeças) uma maneira de associar cada sequência a *exatamente um* número de 1 a n. Em outras palavras, uma função $f_n : X_n \to \{1, 2, \ldots, n\}$, onde X_n é o conjunto de todas sequências de n caras ou coroas (equivalentemente $X_n = \{0, 1\}^n$). Em contrapartida, dado qualquer j de 1 a n, a assistente tem que ser capaz de, a partir de qualquer sequência s de caras e coroas, trocar o lado de uma das moedas assim obtendo uma sequência s' tal que $f_n(s') = j$. Se estas condições forem satisfeitas, elas conseguem fazer seu truque (vencem o jogo).

Considere então a situação com $2n$ moedas. Note que uma fila r de $2n$ moedas pode ser separada em 2 filas com n moedas, r_1 das n primeiras moedas e r_2 das últimas. Sendo assim, quando a mágica voltar ao palco e olhar para a fila, pode usar a associação em sua cabeça, a função f_n, e obter dois números $f_n(r_1)$ e $f_n(r_2)$ entre 1 e n. Ela poderia até tentar criar uma associação entre pares de números (a, b) satisfazendo $1 \le a,\, b \le n$ e números de 1 a $2n$ diretamente, mas ao fazer isto estaria desperdiçando muita informação que está disponível a ela[1].

De fato, seja $I(s)$ o número de coroas aparecendo na sequência $s \in X_n$. Atente ao fato que o ato de alterar a face de uma moeda de uma sequência $s \in X_n$ troca a paridade de $I(s)$. Podemos usar a paridade de $I(r_1)$ para determinar se o número está entre 1 e n ou entre $n + 1$ e $2n$. Além disso, para cada par (a, b) satisfazendo $1 \le a,\, b \le n$, seja $g(a, b)$ o número entre 1 e n tal que $a + b \equiv g(a, b) \mod n$. Dessa forma, a mágica constrói a função

$$f_{2n}(r) = f_{2n}(r_1, r_2) = \begin{cases} g(r_1, r_2), & \text{se } I(r_1) \text{ é par,} \\ g(r_1, r_2) + n, & \text{se } I(r_1) \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Mostremos que a assistente pode fazer sua jogada de maneira que o truque funcione. Seja $r = (r_1, r_2)$ a sequência arbitrária sorteada pela audiência e j o número escolhido. Devido à definição da função f_{2n}, se

- j está entre 1 e n e $I(r_1)$ é par, a assistente fará sua alteração em alguma moeda de r_2,
- j está entre 1 e n e $I(r_1)$ é ímpar, a assistente fará sua alteração em alguma moeda de r_1,
- j está entre $n + 1$ e $2n$ e $I(r_1)$ é par, a assistente fará sua alteração em alguma moeda de r_1,
- j está entre $n + 1$ e $2n$ e $I(r_1)$ é ímpar, a assistente fará sua alteração em alguma moeda de r_2,

e assim passa para a mágica a informação sobre qual caso ela deve considerar em sua função. Se a e b são os números que a assistente vê ao usar a função f_n, a correspondendo à fila que ela irá fazer sua alteração, ela altera esta fila de modo a obter uma sequência $s' \in X_n$ tal que $f_n(s') = c$ é o número de 1 a n tal que $c + b \equiv j \mod n$. Esta alteração é sempre possível, por hipótese, e implica que a mágica recebe a informação $g(c, b)$ correta, concluindo a prova.

[1] Na verdade, tal tentativa se provaria insuficiente. Tal associação teria que ser capaz de, a partir de qualquer par (a, b), gerar, através de mudança em uma das coordenadas, todos os números de 1 a $2n$, por causa da jogada da assistente. Entretanto, a partir do par $(1, 1)$, por exemplo, geramos no máximo $2n - 1$ pares distintos.

20. Este é um problema interessante porque, como veremos adiante, não precisamos inventar uma estratégia para o vencedor. As jogadas escolhidas pelo vencedor não farão diferença e, em certo sentido, o resultado final é inevitável. Antes de mais nada, a resposta é: se n é par, o primeiro jogador, que chamaremos de A, vence; se n é ímpar, o segundo jogador, que chamaremos de B, vence.

Começamos a nossa demonstração com a seguinte crucial afirmação:

Afirmação: Toda diagonal do polígono é cruzada por um número par de diagonais.

Prova: Com efeito, os vértices não pertencentes a esta diagonal são separados por ela em dois grupos, um com a vértices e o outro com b vértices. Segue então que ab diagonais cruzam esta diagonal. Como $a + b = 2n - 1$, um destes número é par, logo o produto ab é par.

Provada a afirmação, seja $S(k)$ o conjunto de diagonais desenhadas ao final do k-ésimo turno e $T(k)$ o conjunto das diagonais que ainda não foram desenhadas ao fim do mesmo turno. Note que $S(k) \cup T(k)$ é o conjunto de todas as diagonais do polígono, portanto tem $(2n+1)(n-1)$ elementos. Seja também $I(k)$ o número de cruzamentos entre diagonais desenhadas e diagonais ainda não desenhadas ao fim do k-ésimo turno, em outras palavras, o número de pares (s, t); $s \in S(k)$, $T \in T(k)$, tais que s cruza t. Afirmamos agora que, ao longo do jogo, $I(k)$ é sempre par.

De fato, $I(0) = 0$ e $I(1)$ é par pela afirmação demonstrada acima. Provemos então por indução. Para cada $t \in T(k)$, seja $f_k(t)$ o número de pares (s, t), $s \in S(k)$, tais que s cruza t. Note que

$$I(k) = \sum_{t \in T(k)} f_k(t).$$

Se $I(n)$ é par e um jogador *consegue fazer sua jogada* no $n + 1$-ésimo turno desenhando uma diagonal r, calculemos $I(n + 1)$. Como desenhar r é uma jogada válida, $f_n(r)$ é par. Juntando este fato com a afirmação acima, concluímos que r cruza um número par de elementos de $T(n)$, que denotaremos por $2m$. Em contrapartida, $S(n + 1) = S(n) \cup \{r\}$ e $T(n + 1) = T(n) \setminus \{r\}$. O valor de $f_{n+1}(t)$ para cada $t \in T(n + 1)$ é igual a $f_n(t)$ para todos os t's que não cruzam r e aumenta em 1 para todos os $2m$ outros t's. Consequentemente,

$$I(n + 1) = I(n) - f_n(r) + 2m$$

também é par, e a indução está completa.

Em vista disso, todo jogador que, no turno $k+1$, receber um conjunto $T(k)$ com um número ímpar de elementos poderá fazer sua jogada. De fato, ao menos um dos valores $f_k(t)$, $t \in T(k)$, tem que ser par, pois a soma de todos eles é $I(k)$, que é par. Dessa forma, a diagonal correspondente a tal valor cruza um número par de diagonais já desenhadas e pode ser escolhida pelo jogador em questão.

Note porém que o número de elementos de $T(k)$ é igual a $(2n - 1)(n - 1) - k$, e é ímpar quando n é par e k é par - ou seja, na vez de A; ou quando n é ímpar e k é ímpar - ou seja, na vez de B. Portanto, se n é par, B fica sem jogadas antes de A; e se n é ímpar, A fica sem jogadas antes de B, o que conclui a prova.

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo