Problemas Resolvidos

Nível 2

Desigualdades II

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

1 Cauchy-Schwarz

Problema 1. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Problema 2. Sejam $a_1, \dots, a_n$ reais positivos. Prove que

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Problema 3. Dados os reais positivos a, b, c, mostre que

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

Problema 4. Sejam a, b, c e d reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}.$$

Problema 5. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{2a + b} + \frac{b}{2b + c} + \frac{c}{2c + a} \leq 1.$$

Problema 6. Sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ reais positivos. Prove que

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Problema 7 (Irã)**.** Sejam a, b e c reais maiores do que 1 tais que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Prove que

$$\sqrt{a + b + c} \geq \sqrt{a - 1} + \sqrt{b - 1} + \sqrt{c - 1}.$$

2 Problemas legais

Problema 8. Sejam a e b reais positivos. Mostre que

$$\frac{3}{2a + b} + \frac{3}{2b + a} \geq \frac{4}{a + b}.$$

Problema 9. Sejam a, b e c reais positivos tais que $a + b + c = 1$. Prove que

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Problema 10. Encontre todos os pares (x, y) de números reais que satisfazem

$$x^2 + y^2 + 2 = (x - 1)(y - 1).$$

Problema 11. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{a + 2b + c} + \frac{c}{a + b + 2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Problema 12 (IMO)**.** Sejam $n \geq 3$ e $a_2, a_3, \dots, a_n$ reais positivos tais que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Problema 13. Sejam a, b e c reais positivos tais que $a + b + c = 3$. Mostre que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Problema 14. Sejam $n > 3$ um inteiro e $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos tais que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$\frac{1}{1 + a_1 + a_1 a_2} + \frac{1}{1 + a_2 + a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{1 + a_{n-1} + a_{n-1} a_n} + \frac{1}{1 + a_n + a_n a_1} > 1$$

Soluções

1. A desigualdade é equivalente a

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca),$$

que por sua vez é equivalente a

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

Essa comparação entre a soma dos quadrados e o quadrado da soma é exatamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada às sequências (a, b, c) e $(1, 1, 1)$.

2. Como os números são todos positivos, podemos trabalhar com as raízes deles. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz às sequências $\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}$ e $\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}$, obtemos

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \cdots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 = n^2.$$

3. Aplicando Cauchy-Schwarz às sequências $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ e $(\sqrt{3a+b}, \sqrt{3b+c}, \sqrt{3c+a})$, vemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{3a^2+ab} + \sqrt{3b^2+bc} + \sqrt{3c^2+ca} \ &\leq \sqrt{(a+b+c)(3a+b+3b+c+3c+a)} = \\ &\sqrt{4(a+b+c)^2} = \\ &2(a+b+c).\end{aligned}$$

4. Aplicando o Lema de Titu, vemos que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{c} = \frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d} = \frac{64}{a+b+c+d},$$

tal como queríamos.

5. Observe que

$$\frac{a}{2a+b} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2a+b}, \quad \text{que é o mesmo que} \quad \frac{a}{2a+b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2a+b}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{b}{2b+c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2b+c}\ , \quad \text{e} \quad \frac{c}{2c+a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2c+a}.$$

Assim,

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a}\right).$$

Logo, para mostrarmos que

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1,$$

é suficiente que mostremos que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Big(\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\Big)\leq 0,$$

ou seja, que

$$\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\geq 1.$$

Finalmente, uma desigualdade que se parece com Titu! Bom, quase, na verdade, mas podemos resolver a falta de quadrados facilmente:

$$\begin{aligned}\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a} &= \frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2bc+c^2}+\frac{a^2}{2ca+a^2} \geq\\ &\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)} =\\ &\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1.\end{aligned}$$

6. Como estamos lidando com números reais positivos, podemos elevar ambos os lados da desigualdade ao quadrado. Vemos, com isso, que ela é equivalente a

$$a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+\cdots+a_n^2+2a_nb_n+b_n^2\leq a_1^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+\cdots+b_n^2+2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Cancelando os termos repetidos, ficamos com

$$2a_1b_1+\cdots+2a_nb_n\leq 2\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2},$$

que é equivalente a

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Esta última desigualdade se verifica porque é Cauchy-Schwarz aplicada às sequências $a_1,\dots,a_n$ e $b_1,\dots,b_n$. Portanto, a desigualdade do enunciado da questão também se verifica.

7. É uma única aplicação de Cauchy-Schwarz, mas encontrar a aplicação perfeita não é tão simples assim. Utilizaremos as sequências $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ e $\big(\sqrt{1-\frac{1}{a}},\ \sqrt{1-\frac{1}{b}},\ \sqrt{1-\frac{1}{c}}\big)$. Aplicando Cauchy-Schwarz, ficamos com

$$\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{a}+1-\frac{1}{b}+1-\frac{1}{c}}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}.$$

Como $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$,

$$\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{a}+1-\frac{1}{b}+1-\frac{1}{c}}=\sqrt{a+b+c},$$

e o problema está resolvido.

8. Para começar, multipliquemos tudo por $a+b$. Como $a+b$ é positivo, podemos fazer isso. Temos

$$\frac{3}{2a+b}+\frac{3}{2b+a}\geq\frac{4}{a+b}\iff\frac{3(a+b)}{2a+b}+\frac{3(a+b)}{2b+a}\geq 4.$$

$a+b$ é positivo. Então, em particular, não é nulo. Assim, podemos dividir coisas por $a+b$. Isso quer dizer que podemos reescrever a desigualdade acima da seguinte forma:

$$\frac{3}{2\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}}+\frac{3}{2\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}}\geq 4.$$

Considere agora os números $\frac{a}{a+b}$ e $\frac{b}{a+b}$. Chamemo-los de x e y, respectivamente. Temos $x+y=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$ e queremos provar que

$$\frac{3}{2x+y}+\frac{3}{2y+x}\geq 4.$$

Observe que esta é exatamente a desigualdade do enunciado escrita com x e y no lugar de a e b - quando botamos x e y, $\frac{4}{x+y}$ vira 4, já que $x+y=1$.

Como $x+y=1$, nossa desigualdade é equivalente a

$$\frac{3}{x+1}+\frac{3}{y+1}\geq 4\iff\frac{9}{x+1}+\frac{9}{y+1}\geq 12,$$

que é equivalente a

$$\frac{9}{x+1}+\frac{9}{y+1}\geq 16-4(x+y). \tag{1}$$

Mas

$$\frac{9}{x+1}\geq 8-4x\iff 4x^2-4x+1\geq 0\iff(2x-1)^2\geq 0$$

e

$$\frac{9}{y+1}\geq 8-4y\iff 4y^2-4y+1\geq 0\iff(2y-1)^2\geq 0.$$

Logo, (1), que é a soma das duas desigualdades acima, é válida.

9. Queremos mostrar que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64\iff(a+1)(b+1)(c+1)\geq 64abc.$$

Como $a+b+c=1$, isso é o mesmo que

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)\geq 64abc. \tag{2}$$

Pela desigualdade das médias,

$$2a+b+c=a+a+b+c\geq 4\sqrt[4]{a^2bc},\qquad a+2b+c=a+b+b+c\geq 4\sqrt[4]{ab^2c},$$

$$\text{e}\quad a+b+2c=a+b+c+c\geq 4\sqrt[4]{abc^2}.$$

Multiplicando as três desigualdades, ficamos com (2).

10. Temos

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+2=(x-1)(y-1) &\iff x^2-xy+y^2+1+x+y=0\\
&\iff \frac{x^2}{2}-xy+\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}+y+\frac{1}{2}=0\\
&\iff \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2=0\\
&\iff (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0.
\end{aligned}$$

Ora, sabemos que todo quadrado de um número real é maior que ou igual a zero, e só é igual a zero se o próprio número é igual a zero. Dessa forma, a igualdade acima ocorre se, e somente se, $x=y$, $x=1$ e $y=1$, isto é, $x=y=1$.

Portanto, o único par de números reais (x,y) que satisfazem $x^2+y^2+2=(x-1)(y-1)$ é $(1,1)$.

11. Observe que

$$\frac{a}{2a+b+c}=1-\frac{a+b+c}{2a+b+c},\qquad \frac{b}{a+2b+c}=1-\frac{a+b+c}{a+2b+c},\quad \text{e}\quad \frac{c}{a+b+2c}=1-\frac{a+b+c}{a+b+2c}.$$

Assim, para mostrar que

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\le\frac{3}{4},$$

devemos mostrar que

$$3-\left(\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{a+2b+c}+\frac{a+b+c}{a+b+2c}\right)\le\frac{3}{4},$$

ou que

$$\frac{9}{4}\le\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{a+2b+c}+\frac{a+b+c}{a+b+2c}.$$

Veja agora que

$$\frac{a+b+c}{2a+b+c}+\frac{a+b+c}{a+2b+c}+\frac{a+b+c}{a+b+2c}=\frac{1}{\frac{a}{a+b+c}+1}+\frac{1}{\frac{b}{a+b+c}+1}+\frac{1}{\frac{c}{a+b+c}+1}.$$

Dessa forma, podemos reescrever a desigualdade que queremos provar em função das variáveis $x=\frac{a}{a+b+c}$, $y=\frac{b}{a+b+c}$ e $z=\frac{c}{a+b+c}$: queremos mostrar que

$$\frac{9}{4}\le\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}.$$

Essas novas variáveis têm uma vantagem sobre as antigas: temos

$$x+y+z=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Isso vai nos ajudar a resolver o problema: pelo Lema de Titu,

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{1^2}{1+x}+\frac{1^2}{1+y}+\frac{1^2}{1+z}\ \ge\ \frac{(1+1+1)^2}{(1+x)+(1+y)+(1+z)}=$$

$$\frac{9}{3+x+y+z}=\frac{9}{4}.$$

12. Faremos uma aplicação da desigualdade das médias a cada um dos parêntesis. Temos

$$1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2} \iff (1+a_2)^2 \geq 4\cdot a_2\ ,$$

$$1+a_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3 \geq 3\sqrt[3]{\frac{a_3}{4}} \iff (1+a_3)^3 \geq \frac{3^3}{4}\cdot a_3\ ,$$

$$1+a_4 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+a_4 \geq 4\sqrt[4]{\frac{a_4}{3^3}} \iff (1+a_4)^4 \geq \frac{4^4}{3^3}\cdot a_4$$

$$\vdots$$

$$1+a_n = \frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}+a_n \geq n\sqrt[n]{\frac{a_n}{(n-1)^{n-1}}} \iff (1+a_n)^n \geq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot a_n.$$

Multiplicando as $(n-1)$ desigualdades, obtemos

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n \geq n^n\cdot a_2a_3\cdots a_n = n^n.$$

Finalmente, precisamos mostrar que a desigualdade é estrita. Para tanto, observemos que, para que tenhamos uma igualdade, precisamos ter igualdade em cada umas das $(n-1)$ desigualdades das médias que consideramos acima. Como a igualdade na desigualdade das médias só ocorre quando os elementos são todos iguais, precisaríamos ter, então,

$$a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{2}\ , a_4 = \frac{1}{3}\ , \ldots, \quad a_n = \frac{1}{n-1}.$$

Se fosse esse o caso, no entanto, o produto $a_2a_3\cdots a_n$ seria igual a $\frac{1}{(n-1)!}$, e não a 1. Logo, não há como termos igualdade em todas as desigualdades das médias e, portanto, a desigualdade que obtemos quando multiplicamos elas é, de fato, estrita.

13. Queremos mostrar que

$$(a^3-a^2)+(b^3-b^2)+(c^3-c^2) \geq 0.$$

Afirmo que $x^3-x^2 \geq x-1$ para todo número real positivo x. De fato, essa desigualdade é equivalente a

$$x^2(x-1) \geq x-1 \iff (x-1)(x^2-1) \geq 0 \iff (x-1)^2(x+1) \geq 0.$$

Sendo o quadrado de um número real, $(x-1)^2$ é maior que ou igual a zero. Sendo x positivo, $(x+1)$ também é maior que ou igual a zero. Logo, a desigualdade é válida. Aplicando-a a a, b e c e somando, obtemos

$$(a^3-a^2)+(b^3-b^2)+(c^3-c^2) \geq (a-1)+(b-1)+(c-1) = a+b+c-3 = 0.$$

Exatamente o que queríamos.

14. Como $a_1a_2\cdots a_n = 1$, existem reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que

$$a_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad a_2 = \frac{x_3}{x_2}, \quad \ldots\ , \ a_{n-1} = \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \text{e} \quad a_n = \frac{x_1}{x_n}.$$

De fato, podemos considerar, por exemplo,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = a_1, \quad x_3 = a_2a_1, \quad \ldots\ , \ x_n = a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

Assim, podemos reescrever a expressão do lado esquerdo da desigualdade como

$$\frac{1}{1+a_1+a_1a_2}+\frac{1}{1+a_2+a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{1+a_{n-1}+a_{n-1}a_n}+\frac{1}{1+a_n+a_na_1}=$$

$$\frac{1}{1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_4}{x_2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_{n-1}}}+\frac{1}{1+\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_n}}=$$

$$\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_2+x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_n+x_1+x_2}.$$

Como $n>3$ e estamos lidando com reais positivos, cada um dos denominadores da última expressão é estritamente menor que $x_1+x_2+\cdots+x_n$. Assim,

$$\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_2+x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_n+x_1+x_2}\ >$$

$$\frac{x_1}{x_1+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+\cdots+x_n}+\cdots+x_{n-1}x_1+\cdots+x_n+\frac{x_n}{x_1+\cdots+x_n}=1.$$