POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Equações diofantinas I

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

Problema 1. Encontre todas as soluções inteiras de $999x - 49y = 5000$.

Problema 2. Encontre todos os inteiros x e y tais que $147x + 258y = 369$.

Problema 3. Encontre todas as soluções inteiras de $2x + 3y + 4z = 5$.

Problema 4. Encontre todas as soluções inteiras do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 4z = 5 \end{cases}.$$

Problema 5. Encontre uma condição necessária e suficiente sobre os coeficientes b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 e d_2 para que o sistema de equações

$$\begin{cases} x + b_1y + c_1z = d_1 \\ x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

tenha ao menos uma solução (x, y, z) nos inteiros.

Problema 6. Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^2 + b^2$ é divisível por ab. Prove que $a = b$.

Problema 7 (EUA)**.** Encontre todos os inteiros positivos n para os quais a equação $2x + 2y + z = n$ tem exatamente 28 soluções (x, y, z), nos inteiros positivos.

Problema 8. Um inteiro positivo n é dito *potencial* se, para todo primo p que divide n, p^2 divide n. Mostre que todo inteiro positivo potencial pode ser escrito na forma a^2b^3, para alguns inteiros a e b.

Soluções

1. Resolver a equação
$$999x - 49y = 5000 \tag{1}$$
é o mesmo que resolver a equação
$$999x + 49y' = 5000, \tag{2}$$
se fizermos $y' = -y$.

Veja que mdc(999, 49) = 1. De fato, $49 = 7^2$, e $7 \nmid 999$. Pelo teorema 10, então, as soluções de (2) são da forma
$$(x_0 + 49k,\ y'_0 - 999k), \quad k \in \mathbb{Z},$$
sendo (x_0, y'_0) uma solução qualquer da equação. Tudo que precisamos, então, é encontrar uma solução para a equação.

Veja que $999 = 1000 - 1 = 50 \times 20 - 1 = 49 \times 20 + 19$. Assim,
$$999x + 49y' = 5000 \iff (49 \times 20 + 19)x + 49y' = 5000 \iff 19x + 49(20x + y') = 5000.$$

Fazendo $y'' := 20x + y'$, segue que é suficiente que encontremos uma solução para a equação
$$19x + 49y'' = 5000.$$

Observe que $49 = 2 \times 19 + 11$. Dessa forma,
$$19x + 49y'' = 5000 \iff 19x + (2 \times 19 + 11)y'' = 5000 \iff 19(x + 2y'') + 11y'' = 5000.$$

Portanto, fazendo $x' := x + 2y''$, podemos nos ater a encontrar uma solução à equação
$$19x' + 11y'' = 5000.$$

Agora, os coeficientes estão pequenos o suficiente para que partamos para uma abordagem mais objetiva. Devemos ter
$$19x' \equiv 5000 \pmod{11}. \tag{3}$$
Veja que $19 \equiv 8 \pmod{11}$. Como $7 \times 8 = 56 \equiv 1 \pmod{11}$, segue que $7 \times 19 \equiv 1 \pmod{11}$. Daí,
$$19x' \equiv 5000 \pmod{11} \iff 7 \times 19x' \equiv 7 \times 5000 \pmod{11} \iff x' \equiv 35000 \pmod{11}.$$

Como $11 \mid 33000$, $3500 \equiv 2000 \pmod{11}$.
Como $11 \mid 1100$, $2000 \equiv 900 \pmod{11}$.
Como $11 \mid 880$, $900 \equiv 20 \pmod{11}$.
Por fim, $20 \equiv 9 \pmod{11}$.
Dessa forma, devemos ter $x' \equiv 9 \pmod{11}$. Podemos tentar $x' = 9$ em (3). Ficamos com
$$\begin{aligned}
19 \times 9 + 11y'' = 5000 &\iff 11y'' = 5000 - 19 \times 9 \\
&\iff 11y'' = 5000 - 20 \times 9 + 9 \\
&\iff 11y'' = 5000 - 180 + 9 \\
&\iff 11y'' = 4829 \\
&\iff y'' = 439.
\end{aligned}$$

Lembremos que $x' = x + 2y''$. Daí. $x = x' - 2y'' = 9 - 878 = -869$.

Como $y'' = 20x + y'$, segue que $y' = y'' - 20x = 439 + 20 \times 869 = 17.819$. Portanto, as soluções de (2) são os pares da forma

$$(-869 + 49k,\ 17819 - 999k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e, como $y' = -y$, as soluções de (1) são, então, os pares da forma

$$(-869 + 49k,\ -17819 + 999k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Temos

$$\begin{aligned} \mathrm{mdc}(147,\ 258) &= \mathrm{mdc}(147,\ 258 - 147) = \mathrm{mdc}(147,\ 111) \\ &= \mathrm{mdc}(111,\ 147 - 111) = \mathrm{mdc}(111, 36) \\ &= 3, \end{aligned}$$

já que $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $2 \nmid 111$, $3 \mid 111$, e $3^2 \nmid 111$.

Como $3 \mid 369$, $\frac{147}{3} = 49$, e $\frac{258}{3} = 86$, segue do teorema 10 que as soluções da equação

$$147x + 258y = 369 \tag{1}$$

são os pares da forma

$$(x_0 + 86k,\ y_0 - 49k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

sendo (x_0, y_0) uma solução da equação. Tudo que precisamos, então, é encontrar uma solução para (1).

Observe que $258 - 147 = 369 - 258 = 111$. Essa simples observação nos permite reescrever a equação de uma maneira luminosa:

$$\begin{aligned} 147x + 258y = 369 &\iff 147x + (147 + 111)y = 147 + 111 + 111 \\ &\iff 147(x + y) + 111y = 147 + 2 \times 111. \end{aligned}$$

Podemos fazer, então, $x + y = 1$ e $y = 2$, isto é, $(x,\ y) = (-1,\ 2)$. Dessa forma, as soluções da equação dada no enunciado são os pares da forma

$$(-1 + 86k,\ 2 - 49k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Sabemos encontrar soluções para equações diofantinas com duas variáveis. Utilizemos isso a nosso favor: para cada valor de z, queremos encontrar x e y tais que

$$2x + 3y = 5 - 4z. \tag{1}$$

Como $\mathrm{mdc}(2,\ 3) = 1$, as soluções dessa equação são da forma

$$(x_0 + 3k,\ y_0 - 2k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

e tudo de que precisamos é encontrar uma solução inicial $(x_0,\ y_0)$.

Uma estratégia é procurar por pares da forma $(a_x + b_x z,\ a_y + b_y z)$. Nesse caso, seria suficiente que tivéssemos $2a_x + 3a_y = 5$ e $2b_x + 3b_y = -4$. Uma solução para a primeira equação é $(1,\ 1)$ e, para na segunda, podemos tomar $(b_x,\ b_y) = (1,\ -2)$. Esses pares nos dão a solução $(1 + z,\ 1 - 2z)$ para (1). Veja que $(1 + z,\ 1 - 2z,\ z)$ é solução da equação do enunciado, seja qual for o valor de z. Portanto, as soluções da equação do problema são as triplas da forma

$$(1 + z + 3k,\ 1 - 2z - 2k,\ z), \quad k,\ z \in \mathbb{Z}.$$

4. Subtraindo a primeira da segunda equação, ficamos com

$$y + z = 1. \tag{1}$$

Uma solução para essa equação é $(y,\, z) = (1,\, 0)$. Assim, pelo teorema 10, as soluções de (1) são os pares

$$(1 + k,\, -k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo na primeira equação do sistema dado, ficamos com

$$x + 2 + 2k - 3k = 4 \;\Rightarrow\; x = 2 + k.$$

Como y e z foram escolhidos de tal forma que a equação que se obtém quando se toma a diferença entre as equações seja satisfeita, $x = 2 + k$ satisfaz (juntamente com $y = 1 + k$ e $z = -k$) também a segunda equação do sistema (verifique!). Portanto, as soluções do sistema apresentado são as triplas

$$(2 + k,\, 1 + k,\, -k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Se $(x,\, y,\, z)$ é uma solução do sistema,

$$(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z = d_1 - d_2. \tag{1}$$

Pelo teorema 10, para que isso aconteça, é necessário que tenhamos $\mathrm{mdc}(b_1 - b_2,\, c_1 - c_2) \mid (d_1 - d_2)$. Por outro lado, se $\mathrm{mdc}(b_1 - b_2,\, c_1 - c_2) \mid (d_1 - d_2)$, o teorema 10 garante que existem y_0 e z_0 inteiros tais que

$$(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z = d_1 - d_2.$$

Se fizermos $x_0 := d_1 - b_1 y_0 - c_1 z_0$, a primeira equação do sistema é automaticamente satisfeita. Como $(y_0,\, z_0)$ é solução de (1), a segunda equação também o é:

$$\begin{aligned} x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 &= x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 - \big[(b_1 - b_2)y_0 + (c_1 - c_2)z_0\big] \\ &= d_1 - (d_1 - d_2) \\ &= d_2. \end{aligned}$$

Dessa forma, uma condição necessária e suficiente para que o sistema apresentado tenha solução nos inteiros positivos é a de que

$$\mathrm{mdc}(b_1 - b_2,\, c_1 - c_2) \mid (d_1 - d_2).$$

6. Suponhamos, por absurdo, que $a \neq b$. Existe, então, um primo p tal que a maior potência de p que divide um dos dois inteiros é (estritamente) maior que a potência de p que divide o outro. Sem perder generalidade, suponhamos que a maior potência de p que divide a, α, é maior que a maior potência de p que divide b, β. Em outras palavras, p é um primo, α e β são inteiros com $\alpha > \beta$, e existem inteiros k_1 e k_2, que não são divisíveis por p, tais que $a = p^{\alpha} k_1$ e $b = p^{\beta} k_2$. Nessas condições,

$$a^2 + b^2 \;=\; p^{2\alpha} k_1^2 + p^{2\beta} k_2^2 \;=\; p^{2\beta}\big(p^{2\alpha - 2\beta} k_1^2 + k_2^2\big) \qquad \text{e} \qquad ab = p^{\alpha+\beta} k_1 k_2.$$

Da primeira igualdade, vem que a maior potência de p que divide $a^2 + b^2$ é $p^{2\beta}$. Da segunda, que a maior potência de p que divide ab é $p^{\alpha+\beta}$. Mas $2\beta < \alpha + \beta$, e a maior potência de p que divide $a^2 + b^2$ deveria ser *maior* que a maior potência de p que divide ab, já que $a^2 + b^2$ é múltiplo de ab. Absurdo!

Dessa forma, nossa hipótese é insustentável e, portanto, havemos de ter $a = b$.

7. Antes de mais nada, observemos o seguinte: se t é um inteiro positivo, a equação

$$x + y = t$$

tem exatamente $t-1$ soluções nos inteiros positivos. De fato, se $(x,\, y)$ é uma solução, temos, por um lado, $x \geq 1$, porque x é positivo e, por outro, $x = t - y \leq t - 1$, porque y é positivo. Assim, x deve pertencer ao conjunto $\{1, 2, \ldots, t-1\}$. E, para cada valor de x em $\{1, 2, \ldots, t-1\}$, há exatamente um valor inteiro positivo para y tal que $x + y = t$ (a saber, $y = t - x$).

Nos encaminhemos, agora, à equação do problema. Queremos encontrar triplas $(x,\, y,\, z)$ inteiras e positivas tais que

$$x + y = \frac{n-z}{2}. \tag{1}$$

A primeira observação que fazemos é a de que z deve ter a mesma paridade que n. Além disso, pelo que vimos acima, para cada valor de z com a mesma paridade de n e tal que $\frac{n-z}{2}$ é positivo, existem exatamente $\frac{n-z}{2} - 1$ soluções para (1).

Como z é positivo, os valores positivos que $\frac{n-z}{2}$ pode atingir quando z varia são exatamente $1, 2, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Lembre-se de que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$, se n é ímpar, e $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$, se n é par.

Dessa forma, para um n fixo, o número de soluções da equação apresentada no enunciado é

$$\begin{aligned}
(1-1) + (2-1) + (3-1) + \cdots + \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 - 1\right) &= 0 + 1 + 2 + \cdots + \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 - 1\right) \\
&= \frac{\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 - 1\right)\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\right)}{2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2},
\end{aligned}$$

onde $k := \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.

Queremos os valores de n para os quais $\frac{k(k+1)}{2} = 28$, isto é, para os quais $k = 7$.

Se n é ímpar,

$$k = 7 \iff \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 = 7 \iff \frac{n+1}{2} = 9 \iff n = 17.$$

Se n é par,

$$k = 7 \iff \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 = 7 \iff \frac{n}{2} = 9 \iff n = 18.$$

Portanto, a equação $2x + 2y + z = n$ tem exatamente 28 soluções inteiras positivas $(x,\, y,\, z)$ se, e somente se, $n = 17$ ou $n = 18$.

8. Se $n = 1$, não há nada que fazer: $1 = 1^2 \cdot 1^3$. Consideremos, então, os inteiros potenciais estritamente maiores que 1.

Comecemos por analisar o caso em que o inteiro potencial é uma potência de primo. Seja p^α um inteiro potencial que é potência do primo p. Por p^α ser potencial, $\alpha \geq 2$. De fato, $\alpha > 0$, já que $p^\alpha > 1$, donde $p \mid p^\alpha$. Daí, $p^2 \mid p^\alpha$ e, portanto, $\alpha \geq 2$.

Se α é par, $p^\alpha = \left(p^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot 1^3$.

Se α é ímpar, $\alpha \geq 3$, donde $\alpha - 3$ é par e não-negativo. Podemos, então, escrever $p^\alpha = \left(p^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)^2 \cdot p^3$.

Portanto, toda potência de primo com expoente maior que 1 (isto é, toda potência de primo que é inteiro potencial) pode ser escrita na forma $a^2 b^3$.

Seja, agora $n > 1$ um inteiro potencial qualquer. Seja

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

a fatoração em primos de n. Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $p_i \mid n$, donde $p_i^2 \mid n$. Daí, $\alpha_i \geq 2 \ \forall \, i = 1, 2, \ldots, k$. Logo, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existem inteiros positivos a_i e b_i tais que $p_i^{\alpha_i} = a_i^2 b_i^3$. Dessa forma,

$$n = a_1^2 b_1^3 \cdot a_2^2 b_2^3 \cdots a_k^2 b_k^3 = \big(a_1 a_2 \cdots a_k\big)^2 \big(b_1 b_2 \cdots b_k\big)^3.$$

Da arbitrariedade de n, segue que todo inteiro positivo potencial pode ser escrito na forma a^2b^3, para alguns inteiros positivos a e b.

Observe que mostrar que p^α pode ser escrito na forma a^2b^3 é o mesmo que mostrar que existem inteiros não-negativos x e y tais que $2x + 3y = \alpha$.