Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

Prof. Bruno Holanda

Aula 3

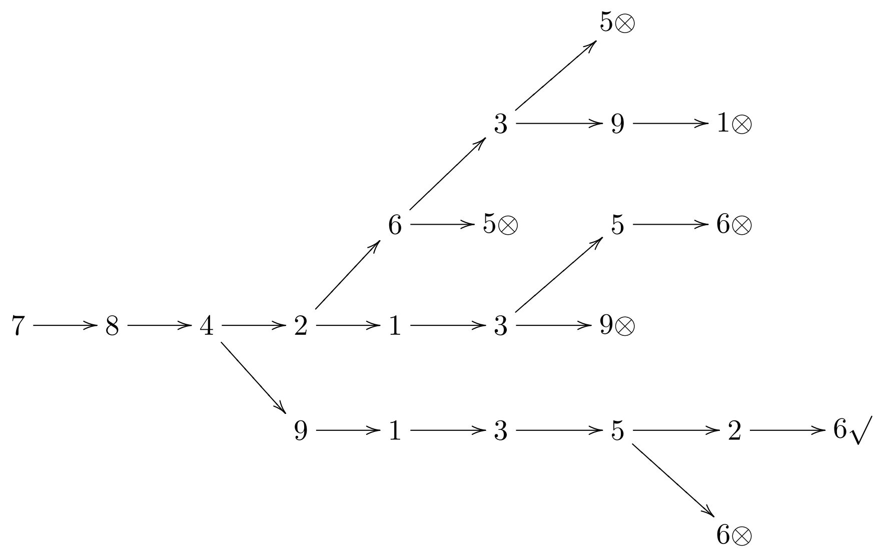
Raciocínio Lógico I

O estudo da Lógica é essencial para os alunos que desejam participar de olimpíadas de matemática. Nesse tipo de competição, muitas vezes os alunos devem demonstrar algum resultado a partir de uma coleção de premissas. Nesta aula não abordaremos a Lógica de um ponto de vista formal. Por outro lado, os problema que aqui serão apresentados juntamente com suas soluções, terão como objetivo ensinar ao leitor de maneira intuitiva como utilizar o raciocínio lógico para demonstrar proposições.

Problema 1. (OBM 1998) Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em sequência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis por 7 ou por 13.

Solução. Primeiramente vamos listar todos os números de dois algarismos que são múltiplos de 7 ou 13. São eles:
Múltiplos de 7: $14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98$
Múltiplos de 13: $13, 26, 39, 52, 65, 78, 91$

Como não podemos repetir nenhum algarismo, devemos descartar o 77. Por outro lado, nenhum dos números acima (excluindo o 77) termina em 7. Daí, pode-se ter certeza que o primeiro número da lista deve ser 7. Para saber as possíveis listas, usamos um diagrama de árvore:



Representamos com um $\otimes$ quando não foi possível continuar a lista sem repetir nenhum dígito. Assim, o modo correto de se escrever os algarismo é: 784913526.

Em alguns casos é necessário o uso de variáveis para resolver um problema. Isto acontece pois existem informações não especificadas no enunciado, e o uso de letras se mostra uma forma inteligente e fácil de trabalhar com valores desconhecidos. A seguir vamos resolver um problema que apareceu em uma olimpíada russa de 1995.

Problema 2. (Rússia 1995) Um trem deixa Moscou às x horas e y minutos, chegando em Saratov às y horas e z minutos. O tempo da viagem foi de z horas e x minutos. Ache todos os possíveis valores para x.

Solução. Das condições do problema, temos que:

$$(60y + z) - (60x + y) = 60z + x$$

$$\Rightarrow 60(y - x - z) = x + y - z.$$

Com isso, podemos garantir que $x + y - z$ é um múltiplo de 60. Por outro lado, como $0 \leq x, y, z \leq 23$, o único valor possível para $x + y - z$ é 0. Ou seja, $x + y = z$. Além disso, na equação inicial temos que $60(y - x - z) = 0$. Daí, $y = x + z$. Logo, o único valor de x que garante essas igualdades é $x = 0$.

É importante perceber que no exemplo anterior que apenas o uso de letras não seria o suficiente para resolver o problema. O fundamental para resolver as equações acima era o significado das letras: números inteiros entre 0 e 60. Sem esta restrição o problema apresentaria infinitas soluções. Então fica a dica: nunca se **esqueça do significado das variáveis que estiver usando**, se são dígitos, números inteiros, racionais ou seja qual for a propriedade. Lembre-se que esta propriedade terá papel importante na solução do problema.

Organizar as informações também é útil na maioria dos problemas, como veremos no exemplo a seguir.

Problema 3. Paulo possui 13 caixas vermelhas e cada uma delas está vazia ou contém 7 caixas azuis. Cada caixa azul está vazia ou contém 7 caixas verdes. Se ele possui 145 caixas vazias, quantas caixas ele possui no total?

Solução. Vamos montar uma tabela que ajudará na solução do problema

	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	x	y	0
Vazias	$13-x$	$7x-y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Suponha que o número de caixas vermelhas cheias seja x e que o número de caixas azuis cheias seja y. Portanto, temos $7x$ caixas azuis e $7y$ caixas verdes. Note também que todas as caixas verdes estão vazias. Dessa forma, o total de caixas vazias é $(13-x)+(7x-y)+7y = 145$. Assim, podemos concluir que $x+y = 22$. Como o número total de caixas é $13+7(x+y)$, a resposta correta será $13 + 7 \times 22 = 167$.

Problema 4. (OCM 1990) A pesquisa realizada com as crianças de um conjunto habitacional, que apurou as preferências em relação aos três programas de televisão: *Alegre Amanhã* (designado por A), *Brincolândia* (designado por B) e *Criança Feliz* (designado por C) indicou os seguintes resultados:

Prog	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A,B e C	Nenhum
Pref	100	150	200	20	30	40	10	130

Pergunta-se:

(a) Quantas crianças foram consultadas?

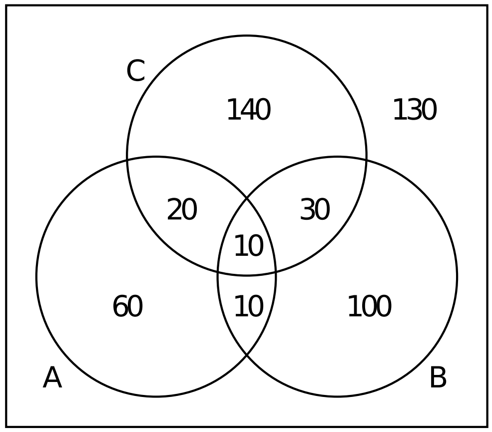
(b) Quantas crianças apreciam apenas um programa?

(c) Quantas crianças apreciam mais de um programa?

Solução. Você deve ter percebido que existe um grande número de informações dadas. De certa forma, essas informações já estão organizadas em uma tabela. Mas para resolver o problema vamos mudar nossa representação, nosso *ponto de vista*. Vamos construir um diagrama de Venn, o popular diagrama de *conjuntos*:

Podemos agora responder às perguntas facilmente:

a) Foram consultadas $10 + 10 + 20 + 30 + 60 + 100 + 140 + 130 = 500$ crianças.



b) $60 + 100 + 140 = 300$ crianças gostam de apenas um programa.

c) $10 + 10 + 20 + 30 = 70$ crianças apreciam mais de um programa. $\square$

Problema 5. (Torneio das Cidades) Carlitos possui seis moedas, sendo uma delas falsa. Nós não sabemos o peso de uma moeda falsa e nem o peso de uma moeda verdadeira, sabemos apenas que as moedas verdadeiras possuem todas o mesmo peso e que o peso da moeda falsa é diferente. Dispomos de uma balança de dois pratos. Mostre como é possível descobrir a moeda falsa usando apenas três pesagens.

Solução. Sejam A, B, C, D, E e F as moedas. Primeiramente fazemos a pesagem $(AB) <> (CD)$ (que significa A e B em um prato e C e D em outro). Se $(AB) = (CD)$ (ou seja, se equilibrar), então ou E ou F é falsa. Neste caso fazemos a pesagem $(A) <> (E)$. Se equilibrar, F é falsa. Caso contrário, E é falsa.

Agora, se não houve equilíbrio em $(AB) <> (CD)$, então E e F são verdadeiras. Fazemos então a pesagem $(AB) <> (EF)$. Se equilibrar, ou C ou D é falsa. Neste caso, fazemos a pesagem $(A) <> (C)$. Se equilibrar, D é falsa. Caso contrário, C é falsa.

Para finalizar, se $(AB) \neq (EF)$, então ou A ou B é falsa. Neste caso, fazemos a pesagem $(A) <> (C)$. Se equilibrar B é falsa. Caso contrário, A é falsa.

Problemas Propostos

Problema 6. São dadas 4 moedas aparentemente iguais. Sabe-se que uma delas é falsa (tem peso diferente das demais e não se sabe se ela é mais leve ou mais pesada). Mostre como descobrir a moeda falsa com 2 pesagens em uma balança de dois pratos.

Problema 7. Você tem nove moedas, e sabe que uma delas é mais leve do que as demais. As outras oito têm o mesmo peso. Determine a moeda mais leve com duas pesagens em uma balança de dois pratos.

Problema 8. Mostre que é possível dispor os números de 1 a 16 em sequância de modo que a soma de dois números vizinho seja sempre um número quadrado perfeito.

Problema 9. (Seletiva Rio-platense 2004) Em cada casa de um tabuleiro 8×8 escrevemos um número inteiro. Sabe-se que para cada casa, a soma dos seus vizinhos é 1. Encontre a soma de todos os números do tabuleiro.
Obs: Consideramos vizinhas casas com um lado em comum.

Problema 10. Etevaldo pensou em cinco números distintos e escreveu no quadro todos dez números que são somas de dois destes cinco números. Será que Ovozildo pode descobrir os números que Etevaldo pensou observando apenas os números escritos no quadro?

Bibliografia Recomendada

Alguns dos exercícios propostos nesta aula foram retirados das seguintes referências:

1. **What is the name of this book - The riddle of Dracula and other logical puzzles**. Raymond Smullyan.

2. **Weighing Coins and Keeping Secrets**. Nicholas Diaco, Tanya Khovanova.

Outra fonte de problemas são as páginas da Olimpíada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`) e da Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (`www.obmep.org.br`).

Dicas e Soluções

6. Sejam A, B, C e D as moedas. Primeiro compare A com B. Se equilibrar, então sabemos que estas são verdadeiras. Daí, compare A com C. Se equilibrar, D é a moeda falsa. Caso contrário C é a falsa. Se na primeira pesagem ocorrer um desiquilíbrio, então C e D são verdadeiras. Na segunda pesagem, compare A com C. Se equilibrar, B é falsa. Caso contrário, a falsa será A.

7. Separe as moedas em três grupos G_1, G_2 e G_3 com três moedas cada. Compare os grupos G_1 e G_2 usando a balança. Se equilibrar, isso significa que a moeda falsa está no terceiro grupo. Se desequilibrar, saberemos se a moeda falsa está no grupo 1 ou no grupo 2. De toda forma, será sempre possível identificar um grupo de três moedas em que uma delas é falsa. Sejam A, B e C as três moedas deste grupo. Usando mais uma vez a balança ára comparar as moedas A e B, caso exista um desiquilíbrio, será possível identificar a moeda falsa. Se equilibrar, a moeda falsa será C.

8. Liste todas as possíveis somas cujo resultado é um quadrado perfeito. Observe que a sequência deve ser iniciada por 8 ou 16.

9. Observe as casas marcadas no tabuleiro abaixo:

	★	★			★	★	
★			★	★			★
★							★
		★			★		
		★			★		
★							★
★			★	★			★

Se olharmos para os vizinhos das casas marcadas acima, vemos que eles cobrem todo o tabuleiro e de maneira disjunta! Como a soma dos vizinhos de cada casa é 1, a soma total dos números do tabuleiro será igual ao número de casas marcadas, que é 20.

10. Sim, é possível. Sejam $a < b < c < d < e$ os números escolhidos por Etevaldo. A soma dos números escritos no quadro é igual ao quadruplo da soma $S = a + b + c + d + e$. Podemos escolher o maior e o menor valor escrito no quadro. Somando estes valores e multiplicando-o por quatro obtemos $4S - 4c$. Assim, é possível achar o valor de c. Note que os três maiores valores escritos por Etevaldo são $e + d > e + c > d + c$. Daí, fazendo $(e + d) + (e + c) - (d + c) = 2e$ é possível achar o valor de e. Mais ainda, como conhecemos $e + d$, consequentemente, também achamos d. De modo análogo, observando os três menores valores $(a + b < a + c < b + c)$ é possível determinar a e b.