POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 2

Ângulos na circunferência

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. São dadas duas circunferências secantes, com pontos de intersecção C e D. Traça-se por C uma secante às duas circunferências, que intersecta uma delas em E e a outra em F. Mostre que o ângulo $\angle EDF$ é constante.

Problema 2. As extremidades de uma corda ST, com comprimento constante, são movidos ao longo de um semicírculo com diâmetro AB. Seja M o ponto médio de ST e P o pé da perpendicular de S sobre AB. Prove que a medida do ângulo $\angle SPM$ independe da posição de ST.

Problema 3. É dado um triângulo ABC. Sejam O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, I o centro da circunferência inscrita ao triângulo, $D \neq A$ a intersecção da reta AI com a circunferência circunscrita. Prove que $CD = BD = ID$.

Problema 4. Se os lados AB e AC de um triângulo são diâmetros de duas circunferências, prove que o ponto comum às circunferências está em BC.

Problema 5. Sejam C_1 e C_2 duas circunferências tangentes exteriores em T. Sejam A e B pontos de C_1 tais que a reta AB é tangente a C_2 em P. Prove que TP é bissetriz externa do triângulo $\triangle ATB$.

Soluções

1. Chame de S_1 a circunferência que contém o ponto E e de S_2 a circunferência que contém o ponto F. Considere o triângulo $\triangle EDF$. Temos que $\angle EDF = 180° - (\angle CED + \angle CFD)$. Basta mostrar que $\angle CED + \angle CFD$ é constante. Veja que $\angle CED$ é ângulo inscrito na circunferência S_1 e que $\angle CFD$ é ângulo inscrito na circunferência S_2, logo ambos ângulos dependem apenas dos pontos C e D.

2. Seja O o ponto médio de AB. Veja que O é também o centro da circunferência de diâmetro AB. O $\triangle SOT$ é isósceles com $OS = OT$, logo OM é bissetriz do $\angle SOT$. Também, como $\angle SOT$ é ângulo central temos que $\angle SOT = \widehat{ST}$ e $\angle SOM = \frac{\widehat{ST}}{2}$ (note que esse valor depende do comprimento fixo da corda ST e não muda quando S e T são movidos).

Como $\angle SPO = \angle SMO = 90°$, a circunferência Γ circunscrita ao $\triangle SPO$ também contém o ponto M e SO é diâmetro dessa circunferência. Note que os ângulos $\angle SPM$ e $\angle SOM$ são inscritos no mesmo arco $\widehat{SM}$ da circunferência Γ, logo são ângulos iguais.

Veja outra solução aqui.

3. Lembre que o centro da circunferência inscrita a um triângulo é o ponto de interseção das bissetrizes.

Como AD é bissetriz do $\angle BAC$ e os ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ são inscritos na circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, temos que $\widehat{CD} = \widehat{DB}$, donde concluímos que $CD = DB$. Provaremos que $\triangle CDI$ é isósceles com $CD = ID$.

Seja $E \neq C$ a intersecção da reta CI com a circunferência circunscrita. Como CE também é bissetriz do $\angle ACB$ temos que $\widehat{AE} = \widehat{EB}$. Como $\angle DCE$ é ângulo inscrito e $\angle CID$ é ângulo excêntrico interior, temos que $\angle DCE = \frac{\widehat{DB}}{2} + \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{AE}}{2} = \angle CID$.

4. Seja D o ponto de intersecção de BC com a circunferência de diâmetro AB, e seja E o ponto de intersecção de BC com a circunferência de diâmetro AC. Usando que AB e AC são diâmetros das respectivas circunferências, temos $\angle ADB = 90°$ e também $\angle AEC = 90°$. Note AD e AE são alturas do $\triangle ABC$ relativas à base BC, logo os pontos D e E coincidem.

5. Sejam M e N os pontos de intersecção de AT com a circunferência C_2 e de AP com a reta tangente a C_1 e C_2 em T, respectivamente.

Note que $\angle NPT$ e $\angle NTP$ são ângulos de segmento relativos ao arco $\overset{\frown}{PT}$ da circunferência C_2 e que $\angle PMT$ é inscrito no arco $\overset{\frown}{PT}$. Temos então que $\angle NPT = \angle NTP = \angle PMT$.

Por outro lado, temos que $\angle NTB$ e $\angle BAT$ são, respectivamente, ângulo de segmento e ângulo inscrito relativo ao arco $\overset{\frown}{BT}$ da circunferência C_1. Temos então $\angle NTB = \angle BAT$.

Como $\angle PTM$ é ângulo externo do $\triangle APT$, temos $\angle PTM = \angle APT + \angle PAT = \angle NTP + \angle NTB = \angle BTP$, como queríamos provar.

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández