Programa Olímpico de Treinamento

Curso de Álgebra - Nível 2 **Aula Complementar I**
Prof. Hugo Araújo

Funções quadráticas - Parte 1

Você muito provavelmente já ouviu alguém dizer “Mais um dia na vida que eu não usei Bhaskara pra nada...”. O caro leitor não deve compartilhar o mesmo sentimento e imagino que compreenda a importância de um método rápido para o cálculo das soluções de uma equação do segundo grau.

Talvez você ainda não saiba, mas este tipo de equação tem aplicações no estudo do movimento dos corpos, de situações de equilíbrio químico e também em problemas de otimização, entre outros. Além disso, é um tópico muito recorrente em problemas de olimpíada, porém de uma maneira um pouco diferente daquela que estamos acostumados na escola.

O objetivo desta aula é explorar alguns exemplos envolvendo equações e funções quadráticas. Começamos demonstrando como a fórmula de Bhaskara é deduzida. A principal ideia é o que chamamos de completar quadrados.

1) Equação do segundo grau

Uma equação quadrática ou do segundo grau é uma equação do tipo

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a \neq 0$, b e c são números reais. Iremos deduzir uma fórmula para suas soluções. Primeiro, como $a \neq 0$, dividimos a equação por a, obtendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Para completarmos o quadrado, adicionamos um valor (livre do termo x) a ambos os lados da equação de maneira que o lado esquerdo seja um “trinômio quadrado perfeito”, ou seja, uma expressão do tipo $(x+d)^2$, que é igual a $x^2 + 2dx + d^2$. Comparando termo a termo, devemos escolher $d = \frac{b}{2a}$, donde segue que precisamos adicionar $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ a ambos os lados. Podemos então resolver a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \cancel{\frac{c}{a}} + \frac{b^2}{4a^2} - \cancel{\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Esta fórmula é conhecida como *fórmula de Bhaskara*, em homenagem a Bhaskara Acharya, matemático que viveu na Índia no século XII. Apesar disto, ele não foi o autor da fórmula e métodos para resolução de equações do segundo grau já eram conhecidos pelos babilônios, milênios antes.

Chamamos de *discriminante* a quantidade dentro da raiz quadrada e a denotamos pela letra grega delta, ou seja, escrevemos $\Delta = b^2 - 4ac$. A fórmula de Bhaskara toma sua forma usual

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Chamamos os dois possíveis valores do lado direito de *raízes da equação*. Convém observar que estas soluções x não correspondem sempre a número reais. Existem três possibilidades, dependendo do valor de Δ:

1. $\Delta > 0$: Neste caso as duas raízes da equação são dois números reais distintos.

2. $\Delta = 0$: Neste caso as duas raízes da equação são idênticas, ambas iguais a um número real.

3. $\Delta < 0$: Neste caso nenhuma das duas raízes é um número real. Ainda assim, existem dois números complexos conjugados que são raízes da equação.

Segue da fórmula que, se x_1 e x_2 são as raízes da equação,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Não é muito difícil então verificar que o lado esquerdo da equação pode ser fatorado como

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Esta é toda a teoria que iremos precisar a respeito de equações. Vamos resolver agora um problema que aponta para uma ideia bastante comum: considerar os coeficientes da equação como variáveis.

Exemplo 1. (OBMEP 2017 - adaptado) Um número inteiro n é chamado de *quase-legal* se n é maior do que 1 e $(n+1)^2$ é igual à soma de n inteiros positivos consecutivos. Encontre todos os números quase-legais.

Solução. Começamos lembrando que $1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$. Segue daí que a soma de n inteiros consecutivos, o menor deles sendo igual a k, é igual a

$$\begin{aligned} k + (k+1) + \cdots + (k+n-1) &= (1 + 2 + \cdots + k + n - 1) - (1 + 2 + \cdots + k - 1) \\ &= \frac{(k+n-1)(k+n)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} \\ &= \frac{n^2 + 2kn - n}{2} \end{aligned}$$

O número n é quase-legal se e somente se existe k inteiro positivo tal que

$$\begin{aligned}(n+1)^2 = \frac{n^2+(2k-1)n}{2} &\iff \\ 2n^2+4n+2 = n^2+(2k-1)n &\iff \\ n^2-(2k-5)n+2=0.&\end{aligned}$$

Considerando a última linha como uma equação do segundo grau em n, a fórmula de Bhaskara nos diz que suas soluções são dadas por

$$n = \frac{2k-5 \pm \sqrt{(2k-5)^2-8}}{2}$$

Observe que, por hipótese, n é inteiro positivo e k também. Isto implica que se n é quase-legal, então o inteiro k tem que ser tal que $(2k-5)^2-8$ é um quadrado perfeito. Dessa maneira, o problema se resume a encontrar os valores de k tais que $(2k-5)^2-8$ é um quadrado perfeito, ou seja, para quais valores de k inteiro positivo existe algum inteiro positivo l tal que

$$\begin{aligned}(2k-5)^2-8 = l^2 &\iff \\ (2k+l-5)(2k-l-5) = 8.&\end{aligned}$$

Analisando a paridade dos lados da equação, notamos que l é ímpar. Além disso, $2k+l-5 > 2k-l-5$ e, pela paridade de l, ambos são pares. Existem então duas possibilidades

$$\begin{aligned}2k+l-5=4 \text{ e } 2k-l-5=2 &\implies k=4 \text{ e } l=1;\\ 2k+l-5=-2 \text{ e } 2k-l-5=-4 &\implies k=1 \text{ e } l=1.\end{aligned}$$

O primeiro caso nos dá $n=(3\pm1)/2$, ou seja, $n=1$ ou $n=2$. O segundo caso resulta em $n=(-3\pm1)/2$, resultando em valores de n negativos. O único número quase-legal é portanto o número 2 ($9 = 4+ 5$). ■

Mais um exemplo, este agora envolvendo a análise do discriminante Δ a respeito do tipo de raízes.

Exemplo 2. Seja a um real positivo tal que

$$a^3 = 6(a+1).$$

Prove que a equação

$$x^2+ax+a^2-6=0$$

não possui solução real.

Solução. Suponha por absurdo que $x^2+ax+a^2-6=0$ tem alguma raiz real. Calculando o discriminante da equação em questão, obtemos

$$\Delta = a^2 - 4(a^2-6) = -3a^2+24.$$

Como há raiz real, o Δ é não-negativo, logo $a^2 \le 8$.

Tá, mas e daí? Precisamos usar ainda, com bastante cuidado, todas informações que nos foram dadas. A primeira equação pode ser reescrita como $a^3-6a=6$. Ela parece muito com o termo livre de x na segunda equação. De fato, multiplicando a segunda equação por a (que sabemos ser positivo), ficamos com:

$$\begin{aligned} ax^2+a^2x+a^3-6a=0 &\iff \\ ax^2+a^2x+6=0. \end{aligned}$$

Como esta equação equivale a original, seu discriminante também tem que ser não-negativo. Portanto, $\Delta = a^4-24a \ge 0$, e como a é positivo, isto equivale a $a^3 \ge 24$.

Entretanto, $a^2 \le 8$ implica que $a^3 \le 16\sqrt{2}$. Em contrapartida, $16\sqrt{2} < 24$ pois $16^2 \times 2 = 512 < 576 = 24^2$. Segue então que $a^3 \le 16\sqrt{2} < 24 \le a^3$, uma contradição. Concluímos que não há raízes reais. ■

Em outros problemas, pode ser necessário explorar as relações de soma e produto de raízes de forma direta. Elas também são conhecidas como relações de Girard e tem forma similar para equações de ordem maior. Contudo, iremos nos restringir a equações de segundo grau nesta aula.

Exemplo 3. (OBM) Sejam a, b, c e d números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2-3cx-8d=0$; e c e d são as raízes da equação $x^2-3ax-8b=0$. Calcule a soma $a+b+c+d$.

Solução. Existem muitas maneiras de resolver este problema, todas elas envolvem manipular as relações entre a, b, c e d de forma inteligente. Pela relações de soma e produto de raízes observamos que

$$\begin{aligned} a+b&=3c & \qquad c+d&=3a \\ ab&=-8d & cd&=-8b; \end{aligned}$$

donde segue que $b=3c-a$ e $d=3a-c$. Segue também que $a+b+c+d=3(a+c)$.

Em contrapartida, substituindo b e d nas segundas equações de cada sistema,

$$a(3c-a) = -8(3a-c) \quad \text{e} \quad c(3a-c) = -8(3c-a)$$

e subtraindo-as vem que $c^2-a^2=(c-a)(c+a)=32(c-a)$. Como os reais são distintos, $c-a \neq 0$ e $a+c=32$. Logo, $a+b+c+d=96$. ■

Encerramos esta sessão lembrando que a fórmula de Bhaskara vale em contextos além dos números reais. Note que, além da operação de tirar a raiz quadrada, realizamos apenas as 4 operações fundamentais para obter a fórmula. Em espaços onde conseguimos realizar estas operações de forma similar, podemos encontrar a fórmula de Bhaskara.

Por exemplo, e aqui é necessário entender um pouco de Teoria dos Números, considere p um número primo diferente de 2 e $\mathbb{Z}_p$ o espaço de restos módulo p, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Podemos realizar as 4 operações fundamentais neste espaço. Você pode estar um pouco encucado com a divisão (por 2), mas assim como na reta, se a for diferente de 0 (o elemento neutro), existe a^{-1}, um elemento tal que $a^{-1} \cdot a \equiv 1 \mod p$. Em $\mathbb{Z}_p$, dividir por a é o mesmo que multiplicar por a^{-1}. Contudo, saber se o discriminante da equação admite ou não alguma raiz quadrada dentro do espaço $\mathbb{Z}_p$ pode ser mais complicado. Costumamos chamar os elementos de $\mathbb{Z}_p$ que tem raiz quadrada de resíduos quadráticos, ou seja, aqueles $a \in \mathbb{Z}_p$ tais que a equação $x^2 \equiv a \mod p$ tem solução em $\mathbb{Z}_p$. Nosso último exemplo está relacionado com estas observações.

Exemplo 4. (OBM 2003) Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x.

Solução. Observe que se $x = 23$ então $23 \mid x^2+5x+23$, e portanto podemos nos restringir a analisar primos menores que 23.

Seja então p primo menor que 23. Analisemos a equação módulo p. Note que para qualquer valor de x inteiro, o número $x^2 + 5x + 23$ é ímpar, logo $p = 2$ nunca divide a expressão. Podemos supor então que $2 \not\equiv 0 \mod p$.

Por clareza, procedemos de forma similar a dedução da fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 23 \equiv 0 \mod p &\iff \\
4x^2 + 4 \cdot 5x + 82 \equiv 0 \mod p &\iff \\
4x^2 + 4 \cdot 5x + 82 + 25 - 82 \equiv 25 - 82 \mod p &\iff \\
(2x+5)^2 \equiv -67 \mod p &\iff \\
x \equiv 2^{-1}(-5 \pm \sqrt{-67}) \mod p.&
\end{aligned}$$

A existência de algum inteiro x tal que $p \mid x^2 + 5x + 23$ equivale a -67 ser resíduo quadrático módulo p. A análise desta propriedade em geral é bem mais simples se o leitor tem familiaridade com o símbolo de Legendre e até reciprocidade quadrática. Iremos fazer aqui a coisa de um jeito mais braçal. Note que $x^2 \equiv (-x)^2 \mod p$. Assim, para encontrar quem são os resíduos quadráticos, basta calcular os quadrados de 0, 1, ..., $\frac{p-1}{2}$ módulo p. Os resíduos quadráticos módulo cada primo p são:

- $p = 3$: 0, 1;
- $p = 5$: 0, 1, 4
- $p = 7$: 0, 1, 4, 2;
- $p = 11$: 0, 1, 4, 9, 5, 3;

- $p = 13$: 0, 1, 4, 9, 3, 12, 10;
- $p = 17$: 0, 1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13.

Calculando -67 módulo p e comparando com os valores acima, notamos que este número só é resíduo quadrático módulo 17, pois $-67 \equiv 1 \pmod{17}$. Segue que este é o menor primo que satisfaz as condições do enunciado. Mais ainda, segue que

$$x \equiv 2^{-1}(-5 \pm \sqrt{-67}) \equiv 9(-5 \pm 1) \equiv 6 \pm 9 \pmod{17}$$

satisfaz $17 \mid x^2 + 5x + 23$. Podemos tomar então $x = -3$, por exemplo. ■

Seguem agora alguns exercícios para praticar o conteúdo desta aula até aqui.

Problema 1. (OBM 2011) Sejam a e b números reais não nulos tais que a equação $x^2 + ax + b = 0$ possui soluções a e b. Determine $a - b$.

Problema 2. Existe algum inteiro positivo n tal que $1 + 2 + \cdots + n$ seja igual ao dobro de um quadrado perfeito?

Problema 3. (Alemanha 2001) Determine todos os númerors reais q tais que a equação $x^4 - 40x^2 + q = 0$ tem quatro raízes reais em progressão aritmética.

Problema 4. (URSS 86) A equação $x^2 + ax + b + 1 = 0$ tem duas raízes inteiras. Prove que $(a^2 + b^2)$ é um número composto.

Problema 5. (África do Sul 2016) Determine todos os pares de números reais a e b, $b > 0$, tais que as soluções das duas equações

$$x^2 + ax + a = b \qquad \text{e} \qquad x^2 + ax + a = -b$$

são quatro inteiros consecutivos.

Problema 6. (OBM 2010) Sejam r e s números inteiros. Sabe-se que a equação do segundo grau

$$x^2 - (r + s)x + rs + 2010 = 0$$

tem as duas soluções inteiras. Quantos são os possíveis valores de $|r - s|$?

Problema 7. (Rússia 2007) Sejam a, b e c três números reais. Prove que ao menos uma das três equações

$$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$$

$$x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$$
$$x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$$

tem alguma raiz real.

Problema 8. (OBM 2001) Mostre que não existem dois números inteiros a e b tais que $(a + b)(a^2 + b^2) = 2001$.

Problema 9. Mostre que se a, b e c são números inteiros ímpares, a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

não tem raiz racional.

Problema 10. Sejam x, y inteiros positivos tais que $x^2 + xy + 7y^2$ é divisível por 23. Encontre o menor valor possível para $(x + y - 103)^2$.

Dicas e respostas

1. Usando o produto das raízes encontramos $a = 1$. Pela soma, segue que $b = -2$. Logo $a - b = 3$.

2. Assim como no **Exemplo** 1, mostre que tal inteiro n satisfaz $n^2 + n - 4k^2 = 0$ para algum k inteiro positivo. Segue então que o discriminante é um quadrado perfeito, o que acontece apenas quando $k = 0$, logo a resposta é não.

3. Substituindo $t = x^2$, as raízes da equação são $\pm\sqrt{x_1}$ e $\pm\sqrt{x_2}$, onde x_1 e x_2 são raízes da equação $t^2 - 40t + q = 0$. Como as quatro estão em PA, segue que $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = 2\sqrt{x_1}$. Daí, $x_1 + x_2 = x_1 + 9x_1 = 10x_1 = 40$. Obtemos que $x_1 = 4$ e $x_2 = 36$, donde segue que $q = 144$.

4. Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação. Escreva $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2$ e fatore.

5. Mostre que as raízes da equação tem que ser os números $-\frac{a+3}{2}, -\frac{a+1}{2}, -\frac{a-1}{2}$ e $-\frac{a-3}{2}$. Além disso, os dois do meio são raízes de uma equação e os dois da ponta de outra. Segue que $(-\frac{a+3}{2})(-\frac{a-3}{2}) + (-\frac{a+1}{2})(-\frac{a-1}{2}) = (a - b) + (a + b) = 2a$. Resolva esta equação do segundo grau encontrando os pares $(-1, 1)$ e $(5, 1)$.

6. Como as duas soluções são inteiras, seu discriminante é um quadrado perfeito, ou seja, $(r + s)^2 - 4rs - 4 \times 2010 = t^2$ para algum inteiro t. Fatorando e analisando paridade, segue que 2010 é o produto de dois inteiros $\frac{r-s+t}{2}$ e $\frac{r-s-t}{2}$. Dado qualquer par de inteiros $(d, 2010/d)$ tal que d divide 2010 encontramos uma solução correspondente com $r - s = d + 2010/d$. Como 2010 tem 16 divisores positivos, segue que a expressão toma 8 valores positivos distintos.

7. Analise o discriminante das três equações e mostre que todos não podem ser negativos ao mesmo tempo.

8. Note que $a + b$ tem que ser positivo, e que $a^2 + b^2 \geq a + b$ também. Analisando os divisores de 2001 e notando que $a^2 + b^2$ nunca deixa resto 3 dividido por 4, restringimos o problema a dois casos: $a + b = 1$ e $a^2 + b^2 = 2001$ ou $a + b = 29$ e $a^2 + b^2 = 69$. Resolvendo o sistema em cada um dos casos, encontramos, em cada um, uma equação do segundo grau em uma variável (a ou b, dependendo da sua preferência). Como buscamos soluções inteiras, os discriminantes tem que ser quadrados perfeitos. Verifique que isto não acontece.

9. Suponha que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível que é raiz da equação. Substitua na equação e analise a "paridade" da expressão obtida.

10. De maneira análoga ao **Exemplo** 4, a condição equivale a $(2x+y)^2 \equiv -27y^2 \equiv -(2y)^2 \mod 23$. Suponha que 23 não divide y. Como 2 é invertível, segue que -1 é resíduo quadrático módulo 23. Contudo, uma simples verificação braçal mostra que isto é falso. Concluímos que $y \equiv 0 \mod 23$ e consequentemente $x \equiv 0 \mod 23$. Em contrapartida, qualquer par que satisfaz estas condições satisfaz a do enunciado. O valor da expressão é minimizado pelo múltiplo de 23 mais próximo de 103, ou seja, $x + y = 92$. O mínimo é portanto $11^2 = 121$.