POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO

Problemas Resolvidos

Nível 3

Desigualdades II

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

1 Desigualdade de Jensen

Problema 1. Sejam a e b números reais positivos, e n um número natural. Prove que

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Problema 2. Prove que, para todo inteiro $n > 1$,

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Problema 3 (Nesbitt)**.** Sejam a, b e c reais positivos. Demonstre que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 4 (IMOSL)**.** Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ reais maiores do que 1. Prove que

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}+1}.$$

Problema 5. Sejam $x \geq y \geq 1$ números reais. Mostre que

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{y}{\sqrt{x+y}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}}.$$

2 Desigualdade das Médias Generalizada

Problema 6 (Young)**.** Sejam a e b números reais não-negativos e p e q números reais maiores que 1 tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Mostre que

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Problema 7. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Problema 8. Sejam a, b e c reais positivos tais que $a+b+c=3$. Determine o menor valor possível de

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Problema 9. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

Problema 10 (Taiwan)**.** Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$3(a+b+c) \geq 8\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

3 Desigualdade de Hölder

Problema 11. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos. Prove que

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})^n.$$

Problema 12. Sejam a, b e c reais positivos tais que $a+b+c=3$. Determine o menor valor possível de

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Problema 13 (Nesbitt)**.** Sejam a, b e c reais positivos. Demonstre que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4 Desigualdade de Karamata

Problema 14 (Nesbitt)**.** Sejam a, b e c reais positivos. Demonstre que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Problema 15. Sejam $a,b,c\geq 0$. Prove que

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Problema 16. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2)\leq (1+a+b^2)(1+b+c^2)(1+c+a^2).$$

5 Desigualdade de Muirhead

Problema 17. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c.$$

Problema 18 (Nesbitt)**.** Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Problema 19 (IMOSL)**.** Sejam a, b e c reais positivos tais que $abc=1$. Prove que

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

Problema 20 (Bulgária)**.** Sejam a, b e c reais positivos tais que $abc=1$. Prove que

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

6 Truque da reta tangente

Problema 21. Sejam a, b, c e d reais positivos tais que $a+b+c+d=4$. Prove que

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\leq\frac{4}{9}.$$

Problema 22. Sejam a, b, c e d reais positivos tais que $a+b+c+d=1$. Mostre que

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

Problema 23. Sejam a, b e c reais positivos tais que $a+2b+3c\geq 20$. Prove que

$$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 13.$$

7 Desigualdade de Schur

Problema 24 (Polônia)**.** Sejam a, b e c reais positivos tais que $ab+bc+ca=3$. Prove que

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq 9.$$

Problema 25 (IMO1984)**.** Sejam a, b e c reais positivos tais que $a+b+c=1$. Prove que

$$0\leq ab+bc+ca-2abc\leq\frac{7}{27}.$$

Problema 26 (APMO)**.** Prove que

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca),$$

sejam quais forem os reais positivos a, b e c.

Problema 27 (Coreia do Sul)**.** Prove que, se a, b e c são números reais positivos, então

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

Soluções

1. Considere a função $f(x) := x^n$, definida no intervalo $(0, +\infty)$.

A primeira derivada de f é igual a $f'(x) = nx^{n-1}$. A segunda, a $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

Como $n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ sempre que $x \geq 0$, $f'' \geq 0$ em todos os pontos de $(0, +\infty)$. Assim, f é convexa, e segue da definição de função convexa que

$$\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) \geq f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

isto é, que

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^n.$$

2. Seja $f(x) := \ln(x)$.

f está definida em $(0, +\infty)$ e, para todo $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Assim, f é uma função côncava em $(0, +\infty)$. Pelo teorema de Jensen, isso implica

$$\frac{\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n)}{n} \leq \ln\Big(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}\Big) \quad \forall\ n > 1,$$

isto é,

$$\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n) \leq n \cdot \ln\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \quad \forall\ n > 1.$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados, ficamos com

$$n! \leq \Big(\frac{n+1}{2}\Big)^n \quad \forall\ n > 1.$$

Observação: A desigualdade é, na verdade, estrita, e há uma elegantíssima maneira de prová-lo:

$\hookrightarrow$ Se n é par, $n!$ é inteiro, enquanto que $\big(\frac{n+1}{2}\big)^n$ não o é. Logo, as quantidades não podem ser iguais.

$\hookrightarrow$ Se $n = 3$, $n! = 6 \neq 8 = \big(\frac{n+1}{2}\big)^n$.

$\hookrightarrow$ Se $n = 5$, $n! = 120 \neq 3^5 = \big(\frac{n+1}{2}\big)^n$.

$\hookrightarrow$ Se $n > 5$, $\frac{n+1}{2} > 3$ e portanto, pelo postulado de Bertrand, existe um número primo p maior que $\frac{n+1}{2}$ e menor que n. p divide $n!$, mas não divide $\big(\frac{n+1}{2}\big)^n$. Logo, as quantidades não podem ser iguais.

3. Como a desigualdade é homogênea, podemos supor, sem perder generalidade, que $a + b + c = 1$. Assim, basta que provemos que

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2},$$

para a, b e c reais positivos tais que $a + b + c = 1$.

$$\text{Consideremos a função} \quad f(x) := \frac{x}{1-x}, \quad \text{definida em} \quad (0, 1).$$

$$\text{Temos} \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \quad \forall\ x \in (0, 1).$$

Assim, f é convexa em $(0,1)$. Aplicando Jensen a f e a, b e c, encontramos

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\Big)\geq\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\geq\frac{3}{2},$$

tal como queríamos.

4. Seja

$$f(x):=\frac{1}{e^x+1},$$

definida em toda a reta real. Temos

$$f'(x)=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}\quad\forall\ x\in\mathbb{R},$$

e

$$f''(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^3}\quad\forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Como $e^{2x}>e^x$ se $x>0$, segue que f é convexa em $(0,+\infty)$.

Como $r_1,r_2,\ldots,r_n$ são todos maiores que 1, $\ln(r_1),\ln(r_2),\ldots,\ln(r_n)$ são todos maiores que 0.

Portanto, por Jensen,

$$\frac{f(\ln(r_1))+f(\ln(r_2))+\cdots+f(\ln(r_n))}{n}\geq f\Big(\frac{\ln(r_1)+\ln(r_2)+\cdots+\ln(r_n)}{n}\Big),$$

ou seja,

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\Big)\geq\frac{1}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1},$$

que é o mesmo que

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}.$$

5. A desigualdade é equivalente a

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-1}{\sqrt{y+1}}\geq\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}.$$

Seja

$$f(x):=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

definida em $(0,+\infty)$.

Tem-se

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}^3}\quad\forall\ x\in(0,+\infty),$$

e

$$f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x}^5}>0\quad\forall\ x\in(0,+\infty).$$

Assim, f é convexa em $(0,+\infty)$.

Aplicando Jensen a f nos pontos $x+y$ e $y+1$ com os pesos respectivos $\frac{x-y}{x-1}$ e $\frac{y-1}{x-1}$, encontramos

$$\frac{x-y}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-1}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{y+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{\frac{x-y}{x-1}\cdot(x+y)+\frac{y-1}{x-1}\cdot(y+1)}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Multiplicando ambos os lados por $x-1$, obtemos

$$\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-1}{\sqrt{y+1}}\geq\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}.$$

6. Aplicando MA-MG a a^p e b^q com os respectivos pesos $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{q}$, obtemos

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq\left(a^p\right)^{1/p}(b^q)^{1/q}=ab.$$

7. Pela desigualdade das médias, a média de índice 0 é maior que ou igual à média de índice -1. Em outras palavras,

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b+c}{3}\geq\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{3}\right)^{-1}\iff\\
&\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\iff\\
&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

8. Aplicando a desigualdade das médias às médias de índices 1 e $-\frac{1}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b+c}{3}\geq\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}}{3}\right)^{-2}\\
&\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{9}{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2}\iff\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\geq\frac{27}{a+b+c}=9\iff\\
&\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\geq 3.
\end{aligned}$$

Pelo teorema (da desigualdade das médias), se $a=b=c$ ($=1$, já que $a+b+c=3$), a igualdade se verifica. Assim, o valor mínimo que

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}$$

pode atingir quando $a+b+c=3$ é 3.

9. Se olharmos para os índices 2 e 1, observaremos que

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{a+b+c}{3} \iff$$

$$(a^2+b^2+c^2)^{1/2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}.$$

Se olharmos para os índices 2 e 0, observaremos que

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt[3]{abc} \iff$$

$$(a^2+b^2+c^2)^{3/2} \geq \sqrt{3}^3 \cdot abc.$$

Multiplicando as duas desigualdades, obtemos

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

10. Queremos demonstrar que

$$9 \cdot \frac{a+b+c}{3} \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Por MA-MG, sabemos que

$$8 \cdot \frac{a+b+c}{3} \geq 8\sqrt[3]{abc}.$$

Por outro lado, a desigualdade das médias potenciais aplicada para $r=3$ e $s=1$ nos diz que

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Para nossa sorte, a primeira desigualdade "supera" a segunda. Para vermos isso, aplicamos a desigualdade entre as médias potenciais, desta vez com outras variáveis. Nosso objetivo será eliminar as raízes cúbicas que aparecem no lado direito da desigualdade do enunciado, então utilizaremos $r=3$ e $s=1$. Temos:

$$\frac{8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}}{9} \leq \sqrt[3]{\frac{8abc + \frac{a^3+b^3+c^3}{3}}{9}}.$$

Mas

$$\sqrt[3]{\frac{8abc + \frac{a^3+b^3+c^3}{3}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{24abc + a^3+b^3+c^3}{27}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{a+b+c}{3},$$

e o problema está resolvido.

11. Basta aplicarmos Hölder às n sequências de dois números $(1, a_1), (1, a_2), \ldots, (1, a_n)$, todas associadas ao mesmo peso $(\frac{1}{n})$: a desigualdade nos dá

$$(1+a_1)^{\frac{1}{n}}(1+a_2)^{\frac{1}{n}} \cdots (1+a_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}},$$

que é o mesmo que

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n})^n.$$

12. Aplicamos Hölder às sequências $(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}})$ e (a, b, c), com os pesos $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente. Obtemos

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\Big)^{\frac{2}{3}}(a+b+c)^{\frac{1}{3}} \geq 3 \iff$$

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\Big)^{2} \geq \frac{3^3}{a+b+c} = 9 \iff$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \geq 3.$$

A igualdade ocorre quando $a = b = c = 1$. Portanto, 3 é o mínimo pelo qual procurávamos.

13. Consideraremos as sequências

$$\Big(\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\Big) \quad \text{e} \quad \big(a(b+c), b(c+a), c(a+b)\big),$$

com os pesos $1/2$ e $1/2$.

Aplicando Hölder nesse contexto, obtemos

$$\Big(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\Big)^{\frac{1}{2}}\big(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)\big)^{\frac{1}{2}} \geq a+b+c \iff$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Ora, $(a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2)$, e $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Logo,

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

14. A desigualdade é simétrica em a, b e c. Logo, como estamos lidando com inteiros positivos, podemos supor, sem perder generalidade, que $a+b+c = 1$. Façamo-lo. Queremos mostrar então que

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2}, \quad \text{com a condição de que} \quad a+b+c = 1.$$

Como tanto a desigualdade quanto a condição são simétricas em a, b e c, podemos supor, sem perder generalidade, que $a \geq b \geq c$. Façamo-lo.

Temos, então, que

$$a \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}, \quad \text{e} \quad a+b \geq \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{2(a+b+c)}{3} = \frac{2}{3}.$$

Assim, (a, b, c) majora $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Consideremos a função

$$f(x) := \frac{x}{1-x}.$$

f está bem definida em $(0,1)$, e sua segunda derivada é dada por

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

que, em tal intervalo, é sempre positivo. Portanto, f é convexa em $(0,1)$. Aplicando a desigualdade de Karamata a f com as sequências (a,b,c) e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, encontramos que

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq 3\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

15. Como a desigualdade é simétrica em a, b e c, podemos supor, sem perder generalidade, que $a \geq b \geq c$. Temos, então,

$$a+b \geq \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}(a+b+c), \quad \text{e} \quad a+b+c+a \geq \frac{a+b+c}{3} + b+c+a = \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Portanto, $(a+b, c+a, b+c)$ majora $\left(\frac{2}{3}(a+b+c), \frac{2}{3}(a+b+c), \frac{2}{3}(a+b+c)\right)$

Olhemos para a função $f(x) := \frac{1}{x}$.

f está bem definida em $\mathbb{R}^*$, e é diferenciável. Sua segunda derivada é $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, que é positivo em $(0,+\infty)$. Logo, f é convexa em $(0,+\infty)$.

Podemos, então, aplicar nesse contexto a desigualdade de Karamata. Como $\left((a+b),(c+a),(b+c)\right) \succ \left(\frac{2}{3}(a+b+c), \frac{2}{3}(a+b+c), \frac{2}{3}(a+b+c)\right)$ e f é convexa, ela nos diz que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{\frac{2}{3}(a+b+c)} = \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Em outras palavras,

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

16. Desta vez, não estamos lidando com uma desigualdade simétrica. Ainda assim, a desigualdade tem alguma ordem de regularidade: se trocarmos (a,b,c) por (c,a,b) ou por (b,c,a), as expressões não mudam. Assim, podemos supor, sem perder generalidade, que $a \geq b$ e $a \geq c$. Daqui para diante, dividamos a solução em dois casos.

Caso I: $b \geq c$

Neste caso, $1+a+a^2 \geq 1+b+b^2 \geq 1+c+c^2$.

Não sabemos quem é maior: se $(1+a+b^2)$ ou $(1+c+a^2)$. Em todo o caso, sabemos que $(1+b+c^2)$ é menor que ambos, e que, seja qual for o maior dentre $(1+a+b^2)$ e $(1+c+a^2)$, $(1+a+a^2)$ é maior que ele.

Por fim,

$$\begin{aligned}
&(1+a+a)^2 + (1+b+b^2) \geq (1+a+b^2) + (1+c+a^2), \quad \text{e} \\
&(1+a+a^2) + (1+b+b^2) + (1+c+c^2) = (1+a+b^2) + (1+c+a^2) + (1+b+c^2).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left((1+a+a^2),(1+b+b^2),(1+c+c^2)\right) \succ \left((1+a+b^2),(1+c+a^2),(1+b+c^2)\right),$$
$$\text{se} \quad (1+a+b^2) \geq (1+c+a^2), \quad \text{ou}$$

$$\big((1+a+a^2),(1+b+b^2),(1+c+c^2)\big) \succ \big((1+c+a^2),(1+a+b^2),(1+b+c^2)\big),$$
$$\text{se} \quad (1+c+a^2) \geq (1+a+b^2).$$

Como a função $f(x) := \ln(x)$ é côncava em $(0,+\infty)$ - sua segunda derivada é igual a $-1/x^2$ -, temos, em todo caso, por Karamata,

$$\ln(1+a+a^2)+\ln(1+b+b^2)+\ln(1+c+c^2) \leq \ln(1+a+b^2)+\ln(1+c+a^2)+\ln(1+b+c^2).$$

Tomando a exponencial em ambos os lados, ficamos com

$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2) \leq (1+a+b^2)(1+b+c^2)(1+c+a^2),$$

que é exatamente o que queríamos provar.

Caso II: $c \geq b$

Neste caso, $1+a+a^2 \geq 1+c+c^2 \geq 1+b+b^2$.

Não sabemos quem é maior: se $(1+a+b^2)$ ou $(1+c+a^2)$. Em todo o caso, sabemos que $(1+b+c^2)$ é menor que ambos, e que, seja qual for o maior dentre $(1+a+b^2)$ e $(1+c+a^2)$, $(1+a+a^2)$ é maior que ele.

Por fim,

$$(1+a+a)^2+(1+c+c^2) \geq (1+a+b^2)+(1+c+a^2), \quad \text{e}$$
$$(1+a+a^2)+(1+c+c^2)+(1+b+b^2) = (1+a+b^2)+(1+c+a^2)+(1+b+c^2).$$

Dessa forma,

$$\big((1+a+a^2),(1+c+c^2),(1+b+b^2)\big) \succ \big((1+a+b^2),(1+c+a^2),(1+b+c^2)\big),$$
$$\text{se} \quad (1+a+b^2) \geq (1+c+a^2), \quad \text{ou}$$

$$\big((1+a+a^2),(1+c+c^2),(1+b+b^2)\big) \succ \big((1+c+a^2),(1+a+b^2),(1+b+c^2)\big),$$
$$\text{se} \quad (1+c+a^2) \geq (1+a+b^2).$$

Como a função $f(x) := \ln(x)$ é côncava em $(0,+\infty)$ - sua segunda derivada é igual a $-1/x^2$ -, temos, em todo caso, por Karamata,

$$\ln(1+a+a^2)+\ln(1+c+c^2)+\ln(1+b+b^2) \leq \ln(1+a+b^2)+\ln(1+c+a^2)+\ln(1+b+c^2).$$

Tomando a exponencial em ambos os lados, ficamos com

$$(1+a+a^2)(1+b+b^2)(1+c+c^2) \leq (1+a+b^2)(1+b+c^2)(1+c+a^2),$$

que é exatamente o que queríamos provar.

17. $(3,-1,-1)$ majora $(1,0,0)$. Logo,

$$\sum_{sim} \frac{a^3}{bc} \geq \sum_{sim} a \iff$$
$$2\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right) \geq 2(a+b+c) \iff$$
$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

18. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $2(b+c)(c+a)(a+b)$, obtemos que ela é equivalente a

$$\begin{aligned}
&2(a^3+b^3+c^3)+2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+6abc \geq \\
&3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+6abc \iff \\
&\quad \sum_{sim} a^3 + 2\sum_{sim} a^2b \geq 3\sum_{sim} a^2b \iff \\
&\qquad \sum_{sim} a^3 \geq \sum_{sim} a^2b
\end{aligned}$$

que, por sua vez, é válida, dado que $(3,0,0)$ majora $(2,1,0)$.

19. Multiplicamos ambos os lados da desigualdade por $4(1+a)(1+b)(1+c)$, para obter que ela é equivalente a

$$4(a^4+b^4+c^4)+4(a^3+b^3+c^3) \geq 3+3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)+3abc.$$

Agora, basta observar que $(4,0,0) \succ (\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$, que $(4,0,0) \succ (2,1,1)$, que $(3,0,0) \succ (\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ e que $(3,0,0) \succ (1,1,1)$, para concluir que

$$\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4 \geq 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}} = 3, \\
&a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2 = a+b+c, \\
&a^3+b^3+c^3 \geq a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}} = ab+bc+ca \text{ e} \\
&a^3+b^3+c^3 \geq 3abc
\end{aligned}$$

e que, portanto,

$$4(a^4+b^4+c^4)+4(a^3+b^3+c^3) \geq 3+3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)+3abc.$$

20. Multiplicando o lado esquerdo por

$$\frac{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}$$

e o direito por

$$\frac{(2+a)(2+b)(2+c)}{(2+a)(2+b)(2+c)},$$

ficamos com

$$\frac{\frac{1}{2}\sum_{sim} a^2 + \frac{3}{2}\sum_{sim} ab + 2\sum_{sim} a + \frac{1}{2}\sum_{sim} 1}{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}$$

e

$$\frac{\frac{1}{2}\sum_{sim} ab + 2\sum_{sim} a + 2\sum_{sim} 1}{(2+a)(2+b)(2+c)},$$

respectivamente.

Dessa forma, se multiplicarmos os dois lados da desigualdade por

$$(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)(2+a)(2+b)(2+c),$$

ficamos com

$$\frac{1}{2}\sum_{sim} a^3bc + 2\sum_{sim} a^3b + 2\sum_{sim} a^3 + 9\sum_{sim} a^2bc + \frac{3}{2}\sum_{sim} a^2b^2c + 3\sum_{sim} a^2b^2 +$$
$$24\sum_{sim} a^2b + \frac{21}{2}\sum_{sim} abc + 12\sum_{sim} a^2 + 31\sum_{sim} ab + 22\sum_{sim} a + 4\sum_{sim} 1$$
$$\leq$$
$$\sum_{sim} a^3b^2 + \sum_{sim} a^3bc + 2\sum_{sim} a^2b^2c + 5\sum_{sim} a^3b + \frac{11}{2}\sum_{sim} a^2b^2 + \frac{23}{2}\sum_{sim} a^2bc +$$
$$30\sum_{sim} a^2b + 2\sum_{sim} a^3 + 11\sum_{sim} abc + 10\sum_{sim} a^2 + \frac{53}{2}\sum_{sim} ab + 14\sum_{sim} a + 2\sum_{sim} 1.$$

Simplificando os termos que aparecem em ambos os lados...

$$2\sum_{sim} a^2 + \frac{9}{2}\sum_{sim} ab + 8\sum_{sim} a + 2\sum_{sim} 1 \quad \leq$$
$$\sum_{sim} a^3b^2 + \frac{1}{2}\sum_{sim} a^3bc + \frac{1}{2}\sum_{sim} a^2b^2c + 3\sum_{sim} a^3b + \frac{5}{2}\sum_{sim} a^2b^2 + \frac{5}{2}\sum_{sim} a^2bc +$$
$$6\sum_{sim} a^2b + \frac{1}{2}\sum_{sim} abc.$$

Como $abc = 1$, isso é o mesmo que

$$\frac{3}{2}\sum_{sim} a^2 + 4\sum_{sim} ab + \frac{11}{2}\sum_{sim} a + \frac{3}{2}\sum_{sim} 1 \quad \leq$$
$$\sum_{sim} a^3b^2 + 3\sum_{sim} a^3b + \frac{5}{2}\sum_{sim} a^2b^2 + 6\sum_{sim} a^2b.$$

Como $(3,1,0) \succ \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $(3,1,0) \succ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$$\sum_{sim} a^3b \geq \sum_{sim} a^{\frac{8}{3}} b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} = \sum_{sim} a^2$$

e

$$\sum_{sim} a^3b \geq \sum_{sim} a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}} c^{\frac{4}{3}} = \sum_{sim} 1.$$

Assim, é suficiente provarmos que

$$4\sum_{sim} ab + \frac{11}{2}\sum_{sim} a \leq \sum_{sim} a^3b^2 + \frac{5}{2}\sum_{sim} a^2b^2 + 6\sum_{sim} a^2b.$$

Como $(3,2,0) \succ (2,2,1)$, e $(2,1,0) \succ \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$$\sum_{sim} a^3b^2 \geq \sum_{sim} a^2b^2c = \sum_{sim} ab,$$

e

$$\sum_{sim} a^2b \geq \sum_{sim} a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}} c^{\frac{1}{3}} = \sum_{sim} ab.$$

Logo, basta mostrarmos que

$$\frac{11}{2}\sum_{sim} a \le \frac{5}{2}\sum_{sim} a^2b^2 + 3\sum_{sim} a^2b.$$

Mas isso segue imediatamente de $(2,2,0) \succ (2,1,1)$ e $(2,1,0) \succ \left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, que implicam

$$\sum_{sim} a^2b^2 \ge \sum_{sim} a^2bc = \sum_{sim} a$$

e

$$\sum_{sim} a^2b \ge \sum_{sim} a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} = \sum_{sim} a.$$

21. Afirmamos que

$$\frac{x}{x^3+8} \le \frac{1}{9} + (x-1)\frac{2}{27}. \tag{1}$$

De onde surgiu a ideia de mostrar essa desigualdade? Ora, $f(x) := \dfrac{x}{x^3+8}$ é a expressão com que estamos lidando no enunciado, $\dfrac{1}{9}$ é o valor de f no ponto 1 (1 é a média aritmética das nossas variáveis) e $\dfrac{2}{27}$ é a derivada de f em 1.

(1) é equivalente a

$$\begin{aligned}
&27x \le 3x^3 + 24 + 2x^4 + 16x - 2x^3 - 16 \iff\\
&2x^4 + x^3 - 11x + 8 \ge 0 \iff\\
&(x-1)(2x^3 + 3x^2 + 3x - 8) \ge 0 \iff\\
&(x-1)^2(2x^2 + 5x + 8) \ge 0,
\end{aligned}$$

que é válida, se $x > 0$.

Aplicando (1) a a, b, c e d e somando, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \le\\
&\left(\frac{1}{9} + (a-1)\frac{2}{27}\right) + \left(\frac{1}{9} + (b-1)\frac{2}{27}\right) + \left(\frac{1}{9} + (c-1)\frac{2}{27}\right) + \left(\frac{1}{9} + (d-1)\frac{2}{27}\right) =\\
&\frac{4}{9} + (a+b+c+d-4)\frac{2}{27} \quad = \quad \frac{4}{9},
\end{aligned}$$

e o problema está resolvido.

22. Queremos mostrar que $(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) \ge \frac{1}{8}$. É claro que consideraremos, então, a função $f(x) := 6x^3 - x^2$.

A médias das nossas variáveis é $\frac{1}{4}$, então olharemos para a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto. Temos $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{32}$, e $f'(\frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$. Será que o truque da reta tangente funcionará nesse contexto? Vejamos...

$$\begin{aligned}
&6x^3 - x^2 \ge \frac{1}{32} + \left(x - \frac{1}{4}\right)\frac{5}{8} \iff 48x^3 - 8x^2 \ge 5x - 1 \iff 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \ge 0 \iff\\
&(4x-1)(12x^2 + x - 1) \ge 0 \iff (4x-1)^2(3x+1) \ge 0.
\end{aligned}$$

Funciona! Sempre que $x > 0$, $(4x-1)^2(3x+1) \geq 0$. Assim,

$$6x^3 - x^2 \geq \frac{1}{32} + \Big(x - \frac{1}{4}\Big)\frac{5}{8} \quad \forall \ x > 0.$$

Aplicando essa desigualdade a a, b, c e d e somando, obtemos

$$\begin{aligned}
&(6a^3 - a^2) + (6b^3 - b^2) + (6c^3 - c^2) + (6d^3 - d^2) \geq \\
&\left(\frac{1}{32} + \Big(a - \frac{1}{4}\Big)\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{32} + \Big(b - \frac{1}{4}\Big)\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{32} + \Big(c - \frac{1}{4}\Big)\frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{32} + \Big(d - \frac{1}{4}\Big)\frac{5}{8}\right) = \\
&\frac{4}{32} + (a+b+c+d-1)\frac{5}{8} \quad = \quad \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

A desigualdade está provada.

23. As variáveis desempenham papeis diferentes neste problema, então utilizaremos um truque para cada uma. Nos três truques, utilizaremos o fato de que $f(x) := 1/x$ é convexa e que, por isso, a reta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto está inteiramente abaixo do gráfico. Explicitamente falando, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} &\geq \frac{1}{2} + (a-2)\frac{(-1)}{4}, \quad \text{já que} \quad a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0; \\
\frac{1}{b} &\geq \frac{1}{3} + (b-3)\frac{(-1)}{9}, \quad \text{já que} \quad b^2 - 6b + 9 = (b-3)^2 \geq 0, \quad \text{e} \\
\frac{1}{c} &\geq \frac{1}{4} + (c-4)\frac{(-1)}{16}, \quad \text{já que} \quad c^2 - 8c + 16 = (c-4)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq a + b + c + \Big(\frac{3}{2} - \frac{3a}{4} + \frac{3}{2}\Big) + \Big(\frac{3}{2} - \frac{b}{2} + \frac{3}{2}\Big) + \Big(1 - \frac{c}{4} + 1\Big) =$$

$$8 + \frac{a + 2b + 3c}{4} \geq 8 + \frac{20}{4} = 13.$$

24. De $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$[1] e $ab+bc+ca \geq 3$, vem que $a+b+c \geq 3$.
Por Schur, $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$.
Assim,

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 + 6abc &\geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc \\
&= (ab+bc+ca)(a+b+c) \\
&\geq 9.
\end{aligned}$$

[1] Que vem de $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

25. A desigualdade da esquerda se resolve com uma simples homogeneização: temos

$$\begin{aligned}
&0 \le ab + bc + ca - 2abc \iff \\
&ab + bc + ca \ge 2abc \iff \\
&(a + b + c)(ab + bc + ca) \ge 2abc \iff \\
&3abc + a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \ge 2abc \iff \\
&abc + a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \ge 0,
\end{aligned}$$

que é verdade, dado que as variáveis são todas positivas.

Para demonstrar a desigualdade da direita, também começamos por homogeneizar:

$$ab + bc + ca - 2abc \le \frac{7}{27} \iff 27(a + b + c)(ab + bc + ca) \le 7(a + b + c)^3 + 54abc.$$

Abrindo e utilizando a notação de somatórios simétricos, ficamos com

$$27\sum_{sim} a^2b + \frac{9}{2}\sum_{sim} abc \le \frac{7}{2}\sum_{sim} a^3 + 21\sum_{sim} a^2b + 7\sum_{sim} abc,$$

que é equivalente a

$$7\sum_{sim} a^3 + 5\sum_{sim} abc \ge 12\sum_{sim} a^2b.$$

Por Muirhead,

$$2\sum_{sim} a^3 \ge 2\sum_{sim} a^2b.$$

Por Schur,

$$5\sum_{sim} a^3 + 5\sum_{sim} abc \ge 10\sum_{sim} a^2b.$$

Somando as duas, obtemos o desejado.

26. Antes de mais nada, expandamos:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) = (abc)^2 + \sum_{sim} a^2b^2 + 2\sum_{sim} a^2 + 8.$$

Agora, utilizamos a desigualdade das médias para transformar a expressão em uma expressão homogênea: temos

$$(abc)^2 + 2 = (abc)^2 + 1 + 1 \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$$

e

$$\sum_{sim} a^2b^2 + 6 = \sum_{sim}(a^2b^2 + 1) \ge 2\sum_{sim} ab.$$

Portanto,

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}} + 2\sum_{sim} ab + 2\sum_{sim} a^2.$$

É suficiente que mostremos, então, que

$$3(abc)^{\frac{2}{3}} + 2\sum_{sim} ab + 2\sum_{sim} a^2 \ge 9(ab + bc + ca),$$

isto é, que

$$3(abc)^{\frac{2}{3}} + 2\sum_{sim} a^2 \geq 5(ab+bc+ca).$$

Aplicando Schur a $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}}$ e $c^{\frac{2}{3}}$, obtemos

$$a^2+b^2+c^2+3(abc)^{\frac{2}{3}} \geq \sum_{sim} a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} \geq \sum_{sim} ab.$$

(A segunda desigualdade vem do fato de que $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) \succ (1,1)$.)
Assim, resta provarmos que

$$\frac{3}{2}\sum_{sim} a^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

isto é, que

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 3(ab+bc+ca).$$

Mas esse resultado é nosso velho conhecido - consegue prová-lo?

27. Eleve ao quadrado os dois lados da desigualdade. As raízes são números positivos, então obteremos uma desigualdade equivalente. Fica claro a partir daí que é suficiente demonstrar que

$$2\sqrt{a^4+b^4+c^4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq 2\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3},$$

ou seja, que

$$(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq (a^3b+b^3c+c^3a)(ab^3+bc^3+ca^3), \tag{1}$$

e que

$$(a^4+b^4+c^4)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq (a^3b+b^3c+c^3a)+(ab^3+bc^3+ca^3). \tag{2}$$

Poderíamos abrir (1) e aplicar Muirhead e/ou Schur, mas há uma maneira mais elegante de lidar com essa desigualdade: por Cauchy-Schwarz,

$$(a^4+b^4+c^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq (a^3b+b^3c+c^3a)^2$$

e

$$(b^4+c^4+a^4)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq (ab^3+bc^3+ca^3)^2.$$

Da raiz do produto das duas, o resultado segue.

Na hora de lidar com (2), Muirhead e Schur são inevitáveis:
Observamos que, se aplicarmos Schur a a, b e c com $r=2$, ficamos com

$$a^4+b^4+c^4+a^2bc+ab^2c+abc^2 \geq \sum_{sim} a^3b = (a^3b+b^3c+c^3a)+(ab^3+bc^3+ca^3).$$

Assim, seria suficiente demonstrarmos que

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2,$$

mas isso é simplesmente Muirhead aplicado às sequências $(2,2,0)$ e $(2,1,1)$!

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel