Problemas Resolvidos

Nível 2

Semelhança de triângulos

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. Sejam D e E pontos sobre os lados AB e AC do triângulo ABC. Sendo $BC = 22$, $AD = 8$, $DB = 3$, $AE = 5$ e $\angle ABE = \angle ACD$, calcule o comprimento de DE.

Problema 2. Considere a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Seja AE um diâmetro dessa circunferência e AD a altura do triângulo. Sendo $AB = 6$, $AC = 10$ e $AE = 30$, calcule AD.

Problema 3. Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC sabendo que $AB = 4$, $AC = 6$ e a altura AH relativa ao lado BC é igual a 3.

Problema 4. (Base média de um triângulo) Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos lados AB e AC do triângulo ABC. O segmento MN é chamado de base média, relativa ao lado BC. Mostre que MN é paralela a BC e que $MN = \frac{BC}{2}$.

Problema 5. Seja $ABCD$ um trapézio com AB paralelo a CD, M e N os pontos médios dos lados oblíquos AD e BC. Use o exercício anterior para concluir que $MN = \frac{AB+CD}{2}$.

Problema 6. (Teorema da bissetriz interna) No $\triangle ABC$, seja AD a bissetriz do $\angle A$, com D no segmento BC. Então $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

Problema 7. No triângulo ABC, a bissetriz interna do ângulo $\angle A$ encontra BC em D. A reta por B, perpendicular a AD, encontra AD em E. Seja M o ponto médio do lado BC. Se $AB = 26$, $BC = 28$ e $AC = 30$, ache os comprimentos de DM e ME.

Problema 8. No triângulo ABC, Z é um ponto sobre o lado AB. Uma reta por A e paralela a CZ, encontra BC em X; uma reta por B e paralela a CZ encontra AC em Y. Mostre que $\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} = \frac{1}{CZ}$.

Problema 9. Seja P um ponto no interior do triângulo equilátero ABC. Por P traçamos três retas paralelas aos lados de ABC, determinando três triângulos menores, de áreas 4, 9 e 49. Determine a área do triângulo ABC.

Problema 10. Duas circunferências c_1 e c_2 interceptam-se em dois pontos A e B. Construa um segmento PQ pelo ponto B com uma extremidade sobre c_1 e a outra sobre c_2 de modo que PQ seja o maior possível.

Soluções

1. Os triângulos ABE e ACD são semelhantes, pois $\angle BAC$ é comum a ambos triângulos e $\angle ABE = \angle ACD$. Então temos

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}.$$

Esta última igualdade implica que dois lados dos triângulos ADE e ABC se encontram na mesma razão. Como o ângulo compreendido entre esses dois lados é comum em ambos triângulos (é o $\angle BAC$), temos que os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Logo

$$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}.$$

O que implica que

$$DE = BC \cdot \frac{AE}{AB} = 22 \cdot \frac{5}{11} = 10.$$

2. Seja O o centro do círculo circunscrito. Como $\angle AOC$ é um ângulo central e $\angle ABC$ é um ângulo inscrito na circunferência, relativos ao mesmo arco, temos

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAD.$$

Também, como $\angle ADB = \angle ACE = 90^\circ$, temos que os triângulos ABD e ACE são semelhantes. Então

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}.$$

Portanto

$$AD = AC \cdot \frac{AB}{AE} = 10 \cdot \frac{6}{30} = 2.$$

3. Traçamos o diâmetro AE da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Exatamente como no problema anterior, temos que os triângulos AEC e ABH são semelhantes. Logo

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AH}.$$

Donde obtemos

$$AE = AB \cdot \frac{AC}{AH} = 4 \cdot \frac{6}{3} = 8,$$

o que mostra que o diâmetro da circunferência circunscrita é igual a 8, logo o raio é igual a 4.

4. Os triângulos AMN e ABC são semelhantes, pois $\angle BAC$ é comum a ambos triângulos e, além disso, os lados nos quais esse ângulo está compreendidos estão na mesma proporção, já que, como M e N são pontos médios de AB e AC, respectivamente, temos

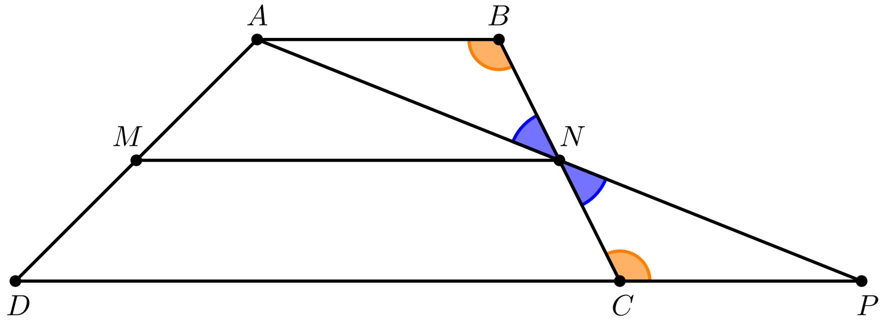
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente, os lados MN e BC se encontram na mesma proporção:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Também, como consequência da semelhança dos triângulos, os outros dois ângulos são congruentes, em particular $\angle AMN = \angle ABC$, o que mostra que $MN \parallel BC$.

5. Denotemos por P o ponto de interseção das retas AN e CD.

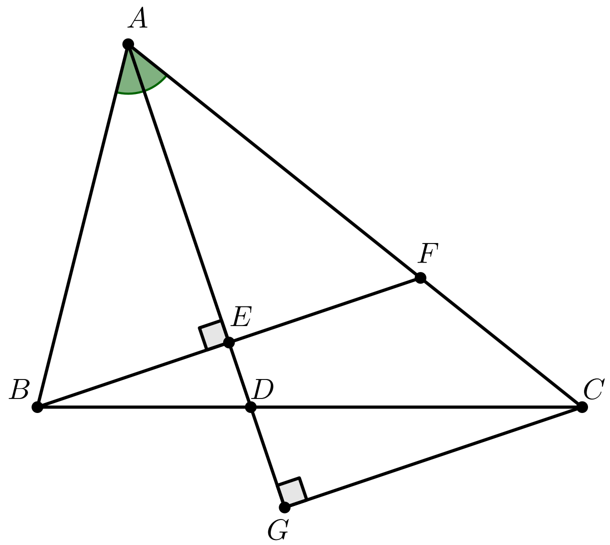


Como $\angle ANB = \angle CNP$, por serem opostos pelo vértice, $BN = NC$ por N ser ponto médio de BC, e $\angle ABN = \angle NCP$, por serem alternos internos, temos que os triângulos $\triangle ABN$ e $\triangle CNP$ são congruentes. Consequentemente, $AN = NP$ e $AB = CP$.

Temos então que MN é base média do $\triangle ADP$. Usando o exercício anterior, concluímos que

$$MN = \frac{DP}{2} = \frac{DC + CP}{2} = \frac{DC + AB}{2}.$$

6. A perpendicular a AD passando por B corta AD em E e AC em F. Seja também G o pé da perpendicular traçada desde C até a reta AD.



Note que como AE é altura e bissetriz no $\triangle ABF$, este triângulo é isósceles, com $AB = AF$. Também, uma vez que $EF \parallel GC$, temos que os triângulos $\triangle AEF$ e $\triangle AGC$ são semelhantes. Assim,

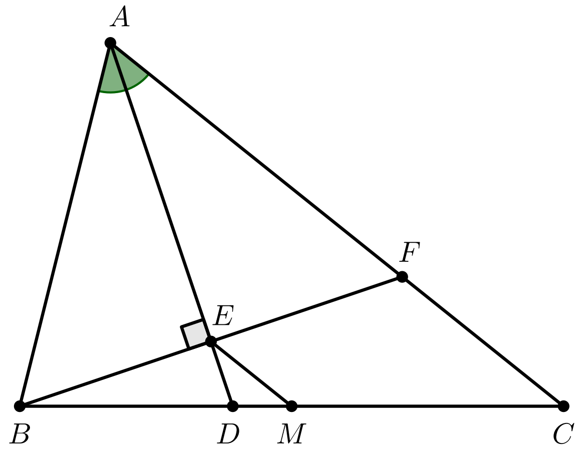
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{GC} = \frac{BE}{GC}.$$

Por outro lado, os triângulos $\triangle BDE$ e $\triangle CDG$ são semelhantes. Logo

$$\frac{BE}{GC} = \frac{BD}{DC}.$$

E isto conclui a prova.

7. Seja F o ponto de interseção de AC com o prolongamento de BE.



Como AE é, ao mesmo tempo, altura relativa à base BF e bissetriz do $\angle BAF$, temos que o $\triangle ABF$ é isósceles com base BF. Consequentemente, E também será ponto médio de BF.

Temos então que ME é base média do $\triangle BCF$, logo $ME \parallel CF$ e

$$ME = \frac{CF}{2} = \frac{AC - AF}{2} = \frac{AC - AB}{2} = \frac{30 - 26}{2} = 2.$$

Usando novamente que $ME \parallel AC$, temos que os triângulos $\triangle DEM$ e $\triangle DAC$ são semelhantes, logo

$$\frac{DM}{DC} = \frac{EM}{AC} = \frac{2}{30}.$$

Como $DC = DM + MC = DM + 14$, temos

$$\frac{DM}{DM + 14} = \frac{1}{15},$$

donde concluímos que $DM = 1$.

8. Note que os triângulos $\triangle BCZ$ e $\triangle BAX$ são semelhantes, logo

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}.$$

Também, os triângulos $\triangle ACZ$ e $\triangle ABY$ são semelhantes, logo

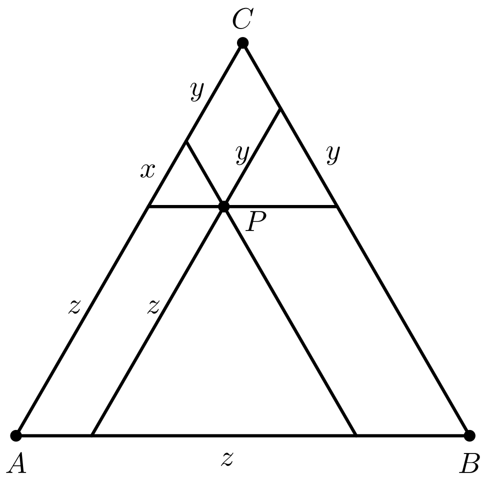
$$\frac{CZ}{BY} = \frac{AZ}{AB}.$$

Logo

$$\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ + AZ}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Dividindo ambos lados por CZ obtemos a igualdade desejada.

9. Sejam x, y e z, respectivamente, os comprimentos dos lados dos triângulos que têm área 4, 9 e 49. Seja ℓ o comprimento dos lados do $\triangle ABC$.



Como estes quatro triângulos são equiláteros, eles são, em particular, semelhantes entre si.

Temos que $(\frac{x}{y})^2 = \frac{4}{9}$, donde concluímos que $y = \frac{3x}{2}$. Por outro lado, temos que $(\frac{x}{z})^2 = \frac{4}{49}$, donde concluímos que $z = \frac{7x}{2}$.

Como $\ell = x + y + z$, temos

$$\ell = x + \frac{3x}{2} + \frac{7x}{2} = 6x.$$

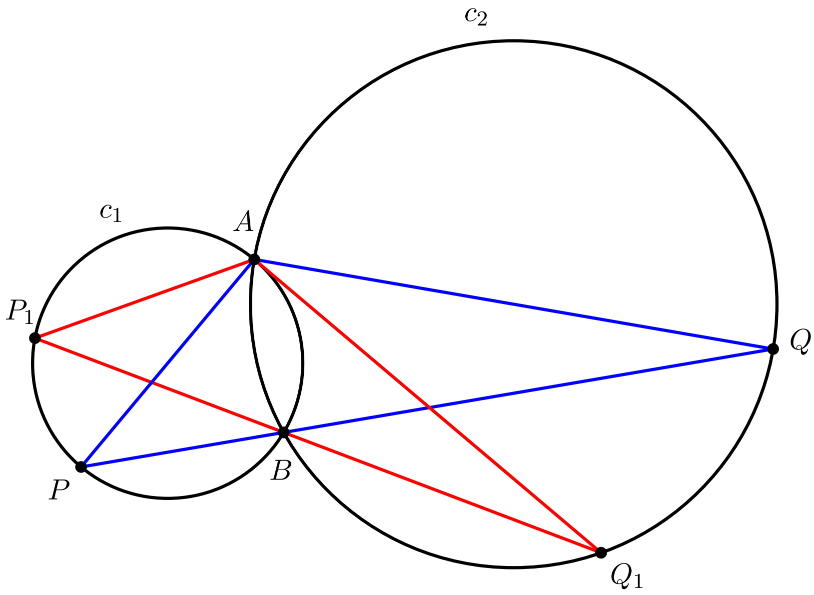
Agora, usando que o triângulo equilátero de lado 4 é semelhante ao $\triangle ABC$, temos

$$\frac{[ABC]}{4} = \left(\frac{\ell}{x}\right)^2,$$

portanto

$$[ABC] = 4\left(\frac{6x}{x}\right)^2 = 144.$$

10. Sejam P e P_1 pontos na circunferência c_1, Q e Q_1 pontos na circunferência c_2, de modo que PQ e P_1Q_1 passem pelo ponto B.



Note que $\angle APB = \angle AP_1B$, por estarem inscritos no mesmo arco da circunferência c_1. Também, $\angle AQB = \angle AQ_1B$, por estarem inscritos no mesmo arco da circunferência c_2.

Isto implica que os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle AP_1Q_1$ são semelhantes. Como os lados de ambos triângulos se encontram então na mesma proporção, temos que a escolha dos pontos P e Q que nos garante que o segmento PQ é o maior possível, deve ser feita de modo que os segmentos AP e AQ sejam também o maior possível. Ou seja, escolheremos P e Q de modo que AP e AQ sejam diâmetros das circunferências c_1 e c_2, respectivamente.

Esta escolha é possível porque $\angle ABP = 90°$ e $\angle ABQ = 90°$ (por AP e AQ serem diâmetros de c_1 e c_2, respectivamente). Logo os pontos P, Q e B estão alinhados.