Problemas Resolvidos

Nível 2

Quadriláteros Inscritíveis

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. Seja $ABCD$ um paralelogramo. A bissetriz de $\angle BAD$ corta BC em M e o prolongamento de CD em N. Se O é o circuncentro do triângulo $\triangle MCN$, mostre que o quadrilátero $BOCD$ é inscritível.

Problema 2. (BAMO) Seja k um círculo no plano xy com centro sobre o eixo y e passando pelos pontos $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ com $0 < a < b$. Seja P um ponto qualquer do círculo, diferente de A e B. Seja Q a intersecção da reta que passa por P e A com o eixo x, e seja $O = (0, 0)$. Prove que $\angle BQP = \angle BOP$.

Problema 3. (OBM) As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD, pela segunda vez, nos pontos M, N, P e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O.

Problema 4. (Ibero) Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissetriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até a reta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC. Prove que $\angle EMD = \angle DMF$.

Problema 5. Seja M o ponto de interseção das diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$, em que $\angle AMB$ é agudo. O triângulo isósceles BCK é construído exteriormente ao quadrilátero, com a base sendo BC, tal que $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Prove que KM é perpendicular a AD.

Problema 6. (Cone Sul) Seja $ABCD$ um quadrado (os vértices estão nomeados no sentido horário) e P um ponto qualquer pertencente ao interior do segmento BC. Constrói-se o quadrado $APRS$ (os vértices novamente nomeados no sentido horário). Demonstrar que a reta CR é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Problema 7. (IMO) Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 intersectam-se em M e N. Seja ℓ a tangente comum a Γ_1 e Γ_2 que está mais próxima de M do que de N. A reta ℓ é tangente a Γ_1 em A e a Γ_2 em B. A reta paralela a ℓ que passa por M intersecta novamente a circunferência Γ_1 em C e novamente a circunferência Γ_2 em D. As retas CA e DB intersectam-se em E; as retas AN e CD intersectam-se em P; as retas BN e CD intersectam-se em Q. Mostre que $EP = EQ$.

Soluções

1. Denotemos por α os ângulos $\alpha = \angle BAN = \angle NAD$. Como $ABCD$ é paralelogramos temos que $\angle MNC = \angle BAN = \alpha$ e $\angle CMN = \angle NAD = \alpha$. Isso implica que $\triangle MCN$ é isósceles e, portanto CO é mediatriz, bissetriz e altura do triângulo MCN relativos ao lado MN. Denotemos por β os ângulos $\beta = \angle MCO = \angle OCN$.

Usando que O é o circuncentro de $\triangle MCN$ temos que $OC = OM$ e que $\angle MOC = 2\angle MNC = 2\alpha$ pois $\angle MOC$ é o ângulo central relativo ao mesmo arco do circuncírculo de $\triangle MCN$ onde $\angle MNC$ está inscrito. Veja também que $\angle DCO = \angle DCB + \angle BCO = 2\alpha + \beta$ e que $\angle BMO = 2\alpha + \beta$ por ser ângulo externo do $\triangle MOC$. Concluímos que $\angle DCO = \angle BMO$. Por último, veja que $\triangle ABM$ também é isósceles por ter dois ângulos iguais a α, logo $MB = AB = DC$. Então podemos concluir, pelo critério l.a.l., que $\triangle DCO \equiv \triangle BMO$.

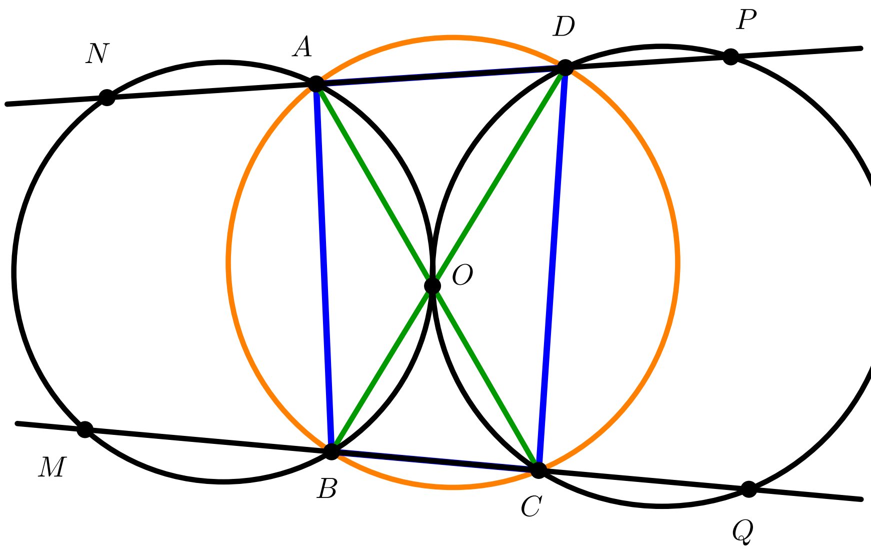
Em particular, como $\triangle DCO \equiv \triangle BMO$, temos que $\angle CBO = \angle CDO$, o que conclui a prova de que $BOCD$ é inscritível.

2. Seja $R \neq B$ o ponto de intersecção de BQ com o círculo k. Como AB é diâmetro do círculo k, temos que $\angle BRA = \angle BPA = 90°$. Seja S o ponto de interseção das retas BP e QO. Note que A é o ortocentro do $\triangle BQS$, pois é o ponto de intersecção das alturas BO e QP. Por tanto SA e BQ se intersetam formando um ângulo reto. Como AR e BQ são perpendiculares, teremos que R é o pé da altura do $\triangle BQS$ correspondente ao vértice S (ou seja, S, A e R estão alinhados).

Considerando a soma do ângulos internos dos triângulos retângulos $\triangle BPQ$ e $\triangle BRS$ temos que $\angle BQP = 90° - \angle PBQ = 90° - \angle RBS = \angle BSR$.

O $AOSP$ é inscritível pois possui um par de ângulos opostos iguais a $90°$ (ou seja, a soma dos ângulos opostos é $180°$). Consequentemente, temos $\angle ASP = \angle AOP = \angle BOP$, o que conclui a prova.

3. Usando que os quadriláteros $ABMN$, $ABCD$ e $CDPQ$ são inscritíveis (conforme mostra a figura), temos que $\angle PNM = \angle ANM = 180° - ABM = \angle ABC = 180° - ADC = \angle CDP = 180° - CQP = 180° - MQP$. Isso mostra que os ângulos opostos do quadrilátero $MNPQ$ somam $180°$, logo é um quadrilátero inscritível.



Usando que os quadriláteros $ANBO$, $ABCD$ e $DPCO$ são inscritíveis, temos que $\angle PNO = \angle ANO = \angle ABO = \angle ABD = \angle ACD = \angle OCD = \angle OPD = \angle OPN$. Logo $\triangle ONP$ é isósceles com $ON = OP$. Analogamente, também vale $OM = OQ$.

Para finalizar, basta mostrar que $ON = OM$. Para isso, veja que $\angle NMO = 180° - \angle NAO = \angle CAD = \angle CBD$ e também que $\angle NMO = \angle NBO$. Isso mostra que BO é bissetriz do $\angle NBC$. Analogamente teremos também que AO é bissetriz do $\angle MAD$, ou seja, $\angle MAO = \angle OAD$. Como $\angle MAO = \angle MNO$, obtemos finalmente que $\angle MNO = \angle NMO$, o que conclui a prova.

4. Como $\angle CFD = \angle CMD = 90°$ temos que o quadrilátero $CFDM$ é inscritível, logo temos $\angle DMF = \angle DCF$. Note que $\angle DCF = \angle DAE$ por serem alternos internos, uma vez que $CF \parallel AE$.

Agora considere o ponto N na reta AB tal que $AB \perp ND$. Note que, como $\angle AED = \angle AND$, o quadrilátero $ANED$ é inscritível, logo teremos $\angle DAE = \angle DNE$.

Mostramos então que $\angle DMF = \angle DNE$. Agora, como BD é bissetriz de $\angle ABC$ e M e N são, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde D até as retas BC e BA, temos que $DM = DN$ e $\angle MDE = \angle NDE$. Logo teremos $\triangle MDE \equiv \triangle NDE$ (critério l.a.l., considerando que DE é um lado comum a ambos triângulos). Consequentemente teremos $\angle EMD = \angle END$, o que conclui a prova.

5. $\angle BKC = 180° - 2\angle KBC = 2(90° - \angle KBC) = 2\angle AMB$. Isso, junto com o $BK = KC$, implica que $\angle BKC$ é ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{BMC}$ da circunferência circunscrita ao $\triangle BCM$. Consequentemente teremos $KB = KM = KC$ e, em particular, $\triangle BKM$ é isósceles, com $\angle KBM = \angle KMB$.

Seja N o ponto de interseção de KM com AD. Queremos mostrar que $\angle MND = 90°$.

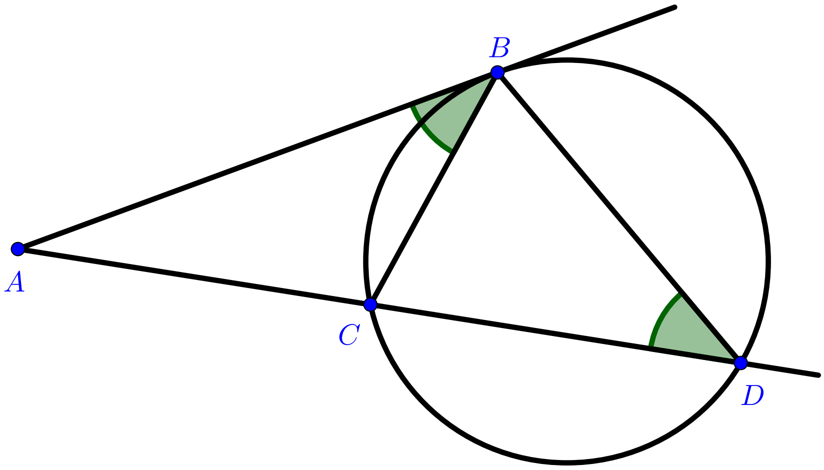
Como $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, temos que $\angle ADB = \angle ACB$. Logo teremos $\angle NDM + \angle NMD = \angle ACB + \angle BMK = \angle ACB + \angle MBK = \angle MCB + (\angle MBC + \angle KBC) = (\angle MCB + \angle MBC) + \angle KBC = \angle AMB + \angle KBC = 90°$, o que conclui a prova.

6. A circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ é também a circunferência circunscrita ao quadrado $ABCD$. O centro dessa circunferência é o ponto de interseção das diagonais do quadrado. Portanto, basta mostrar que $\angle ACR = 90°$.

Como AC e AR são diagonais dos quadrados $ABCD$ e $APRS$, respectivamente, temos que $\angle ACB = \angle ARP = 45°$. Logo o quadrilátero $APCR$ é inscritível (pois $\angle ACP = \angle ARP$) e, portanto $\angle ACR = \angle APR = 90°$, como queríamos mostrar.

No próximo exercício vamos usar o seguinte resultado:

Lema 1. Seja Γ uma circunferência e A um ponto externo a Γ. Traçamos por A uma reta tangente a Γ que intersecta ela no ponto B e uma outra reta que intersecta Γ em dois pontos (distintos) C e D, conforme mostra a figura. Então $AB^2 = AC \cdot AD$.



Demonstração. Note que $\angle ABC = \angle BDC$ por serem, respectivamente, ângulo de segmento relativo à circunferência Γ e ângulo inscrito, ambos correspondentes ao arco $\widehat{BC}$. Logo os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são semelhantes (note que $\angle BAC$ é comum a ambos triângulos).

Vale então a razão de semelhança: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, donde obtemos $AB^2 = AC \cdot AD$. $\square$

7. Veja que $\angle ABM = \angle BDM$, pois são, respectivamente, ângulo de segmento e ângulo inscrito relativos ao arco $\widehat{MB}$ na circunferência Γ_2. Como $\angle EBA = \angle BDM$ por serem ângulos correspondentes, teremos que BA é bissetriz do $\angle EBM$. Analogamente temos também que AB é bissetriz do $\angle EAM$. Pelo critério a.l.a., temos que $\triangle AEB \equiv \triangle AMB$. Consequentemente, os triângulos $\triangle AEM$ e $\triangle BEM$ são isósceles, ambos com base EM. Então a reta AB, além de ser bissetriz dos ângulos $\angle EAM$ e $\angle EBM$, ela também corta o segmento EM no seu ponto médio e formando um ângulo de $90°$. Como $AB \parallel CD$, temos que $\angle EMD = 90°$. Basta mostrar que $PM = MQ$.

Seja R o ponto de interseção de MN com AB. Como AB é tangente às circunferências Γ_1 e Γ_2. Usando o Lemma 1 em ambas circunferências, temos que $AR^2 = RM \cdot RN$ e $BR^2 = RM \cdot RN$, donde concluímos que $AR = RB$.

Como $AB \parallel PQ$, vamos ter $PM = MQ$. E isso conclui a nossa prova.