Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Geometria - Nível 1

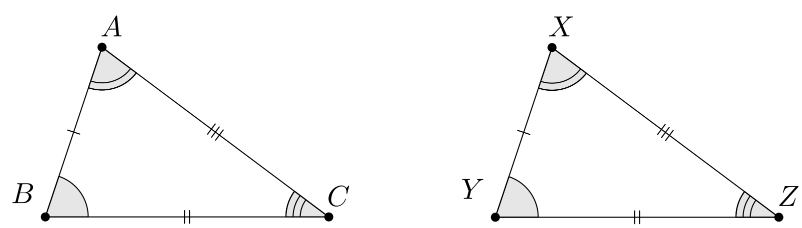
Prof. Bruno Holanda & Emiliano Chagas

Aula 5

Congruência de Triângulos

Neste capítulo iremos estudar uma das ferramentas mais importantes para dar rigor aos argumentos geométricos cuja conclusão é a de que dois segmentos são iguais ou a de que dois ângulos são iguais.

Definição: Dois triângulos ABC e XYZ são *congruentes* se e somente se for possível construir uma relação entre os vértices do primeiro com os vértices do segundo de modo que todos os lados do primeiro e todos os ângulos do segundo sejam iguais aos lados e ângulos correspondentes no segundo triângulo. Ou seja, $AB = XY$, $BC = YZ$, $CA = ZY$, $\angle ABC = \angle XYZ$, $\angle BCA = \angle YZX$ e $\angle CAB = \angle ZXY$.



Notação: Utilizaremos o símbolo ($\equiv$) para denotar dois triângulos congruentes. Por exemplo, neste caso, $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

De maneira intuitiva, dois triângulos serão congruentes quando for possível fazer com que o primeiro encaixe no segundo através de transformações rígidas (que não envolvem dilatações).

Felizmente, para provar que dois triângulos são congruentes, não é necessário verificar todas as seis igualdades da definição. Veremos que certas combinações de três dessas seis igualdades serão suficientes para demonstrar que dois triângulos são congruentes. E é esse o poder dessa estratégia para resolver problemas de Geometria: A partir de três igualdades (já verificadas como verdadeiras), podemos demonstrar outras três igualdades. O primeiro caso de congruência é o:

Caso LAL. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $BC = YZ$ e $\angle ABC = \angle XYZ$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Este caso de congruência é um *postulado* da Geometria Euclidiana. Ou seja, ele não pode ser demonstrado e deve ser simplemente aceito como verdadeiro. Os demais casos que apresentaremos a seguir podem ser demonstrados a partir do caso LAL. Essas demonstrações estão reunidas no apêndice por serem muito técnicas.

Caso LLL. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $BC = YZ$ e $CA = ZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Caso ALA. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $\angle ABC = \angle XYZ$, $BC = YZ$ e $\angle BCA = \angle YZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Uma consequência importante dessa congruência é a seguinte: Se $ABCD$ é um paralelogramo, i.e., tem pares de lados opostos paralelos, então $\angle DAC = \angle ACB$ e $\angle DCA = \angle CAB$ (pelo quinto postulado de Euclides). Daí, $\Delta DAC \equiv \Delta CBA$, pelo caso **ALA**. De modo análogo, $\Delta DCB \equiv \Delta ABD$.

Caso $\mathbf{LAA_o}$. Se ABC e XYZ são dois triângulos tais que $AB = XY$, $\angle ABC = \angle XYZ$ e $\angle BCA = \angle YZX$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

Observe que este caso de congruência pode ser demonstrado a partir do caso **ALA**, uma vez que a soma dos ângulos em qualquer triângulo é sempre igual a $180°$. Portanto, se sabemos as medidas de dois ângulos de um triângulo, sabemos também a medida do terceiro.

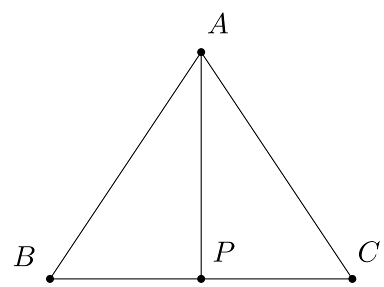
Por fim, ainda temos o caso especial para triângulos retângulos. A demonstração desse caso de congruência utiliza o chamado *Teorema de Pitágoras*, que veremos no próximo capítulo. De fato, se sabemos as medidas de um dois lados de um triângulo retângulo, então sabemos a medida do terceiro lado pelo Teorema de Pitágoras.

Caso Cateto-Hipotenusa. Se ABC e XYZ são dois triângulos $\angle ABC = \angle XYZ = 90°$, $AB = XY$ e $AC = XZ$, então $\Delta ABC \equiv \Delta XYZ$.

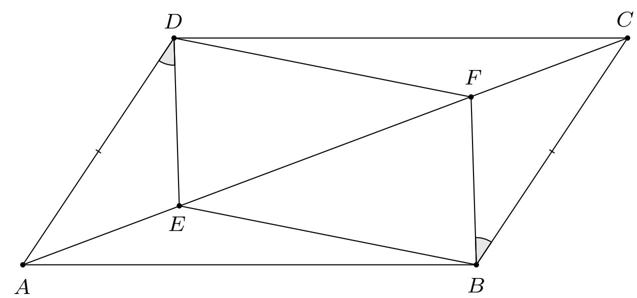
Vamos ver dois problemas que utilizam em sua resolução congruência de triângulos. O primeiro é um resultado muito utilizado como fato conhecido, e que em problemas de olimpíada de fato você pode se utilizar do resultado sem provar, mas que agora terá uma demonstração formalizada. O segundo problema já possui características de olimpíada, e poderia ser um problema ou uma parte da resolução de um problema, mas escrito de maneira formal.

Problema 1. Mostre que um triângulo que têm dois ângulos iguais é isósceles.

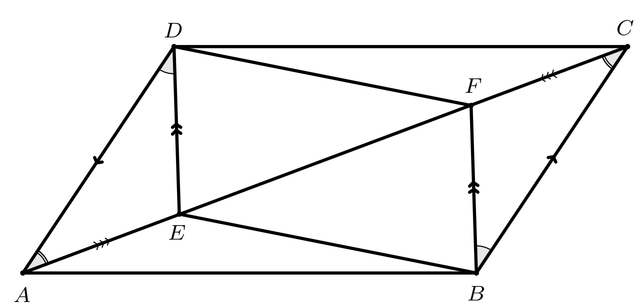
Considere um triângulo ABC com $\angle ABC = \angle BCA$. Seja P o pé da altura de A até BC. Note que os triângulos ABP e ACP são congruentes pelo caso LAA_o. Portanto, $AB = AC$.



Problema 2. No desenho a seguir $AD = BC$, $AD \parallel BC$ e E e F estão no segmento AC de modo que $\angle ADE = \angle CBF$. Prove que $AB \parallel CD$ e $DF = EB$.



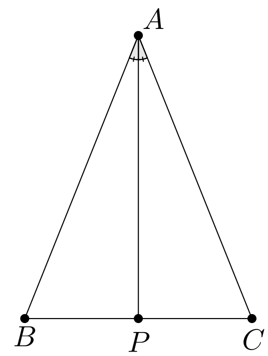
Para provar que AB e CD são paralelos, vamos procurar ângulos congruentes. Veja que $AD \parallel BC$, portanto $\angle DAC = \angle ACB$, e como $AD = BC$ e AC é comum, então $\Delta CAD \cong \Delta ACB$ por LAL. Em particular, $\angle DCA = \angle BAC$, portanto $AB \parallel CD$. Veja que $\Delta DAE \cong \Delta BCF$ por ALA, em particular temos que $AE = CF$. Vamos provar que $\Delta ADF \cong \Delta CBE$, olhando os lados desses triângulos temos $AF = AE + EF = CF + EF = CE$, como já temos os ângulos congruentes e os outros lados, então essa congruência é verdadeira pelo caso LAL, em particular, mostramos finalmente que $DF = BE$.



Fatos Importantes

Antes de partirmos para a seção de problemas, iremos demonstrar uma série de fatos importantes que são demonstrados através de casos de congruência de triângulos.

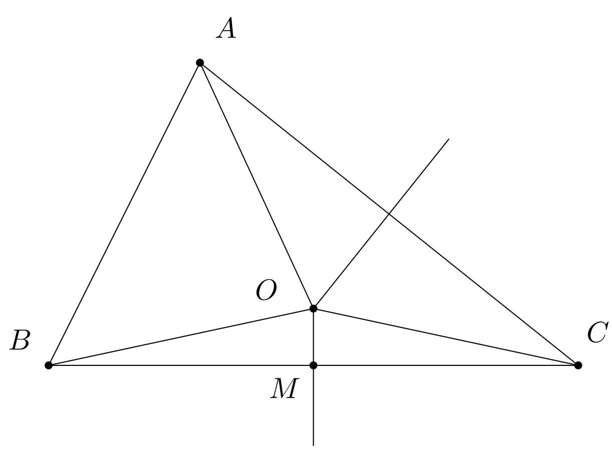
Fato Importante: Se ABC é um triângulo isósceles ($AB = AC$), então os ângulos da base são iguais ($\angle ABC = \angle ACB$).



Demonstração. Seja P o pé da bissetriz do ângulo $\angle BAC$. Note que $\Delta ABP \equiv \Delta PCA$ (LAL). Portanto, $\angle ABP = \angle ACP$.

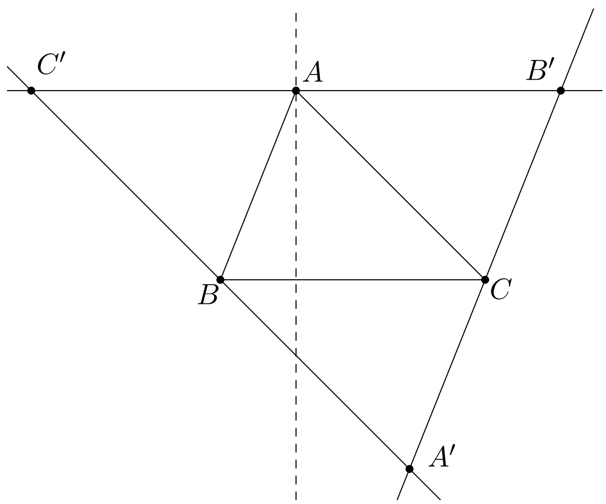
O resultado anterior também garante que os ângulos $\angle APB$ e $\angle APC$ são iguais e que $PC = PB$. Portanto, ambos são retos. Ou seja, em um triângulo isósceles a bissetriz também é altura e mediana.

Fato Importante. As três mediatrizes relativas aos lados de um triângulo ABC encontram-se em um único ponto chamado de **circuncentro**.



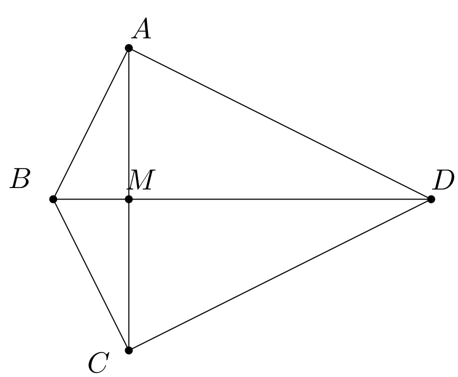
Demonstração. Seja O o ponto de encontro entre as mediatrizes dos lados BC e CA. Veja que essas duas retas não podem ser paralelas. Portanto, o ponto O existe. Seja M o ponto médio de BC veja que os triângulos OMB e OMC são congruentes pelo caso (LAL). Logo, $OB = OC$. De modo análogo, podemos demonstrar que $OC = OA$. Logo, o ΔAOB é isósceles. E como vimos no comentário anterior, a mediana de um triângulo isósceles também é sua altura. Logo, se N é o ponto médio de AB, ON será a mediatriz de AB.

Fato Importante. As três alturas relativas aos lados de um triângulo ABC encontram-se em um único ponto chamado de **ortocentro**.



Demonstração. Sejam r, s e t três retas paralelas aos lados BC, CA e AB passando pelos pontos A, B e C, respectivamente. Sejam ainda A', B' e C' os pontos de interseção entre essas retas. Note que $AB'CB$ é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados paralelos. Com isso, $\Delta ABC \equiv \Delta AB'C$. De modo análogo, $\Delta ABC \equiv \Delta ABC'$ e $\Delta ABC \equiv \Delta A'BC$. Daí, perceba que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes do triângulo $A'B'C'$, que se encontram em um único ponto pelo resultado anterior.

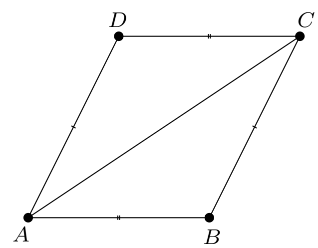
Fato Importante. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB = BC$ e $AD = DC$. Então, suas diagonais são perpendiculares.



Demonstração. Seja M o ponto médio de AC. Como os triângulos ABC e ADC são isósceles, BM e DM são alturas. Logo, B, M e D são colineares. Portanto, M será o ponto de encontro das diagonais e estas serão perpendiculares.

Observação. Quadriláteros como esse são chamados de *pipas*.

Fato Importante. Um quadrilátero é chamado de *paralelogramo* se ambos os pares de lados opostos forem paralelos. Vamos mostrar que se um quadrilátero possui lados opostos congruentes, então ele também é um paralelogramo, e de maneira recíprioca, um paralelogramo possui os lados opostos congruentes.



Demonstração. Traçamos a diagonal AC. Veja que $\Delta DAC \cong \Delta ABC$ pelo caso LLL. Desse modo $\angle BAC = \angle ACD$, portanto $AB \parallel CD$. Analogamente, temos $\angle DAC = \angle ACD$, e assim $AD \parallel BC$.

A demonstração de que um paralelogramo possui lados opostos congruentes utiliza a mesma figura, mas as hipóteses agora são que $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$. Desse modo temos que $\angle BAC = \angle ACD$ e $\angle DAC = \angle ACD$. Assim sendo, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ pelo caso ALA.

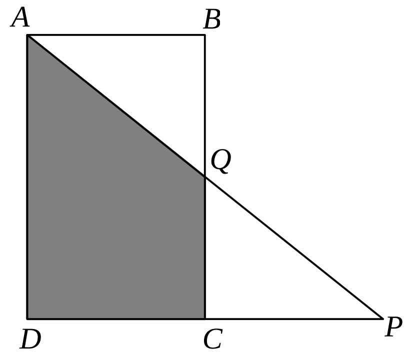
Problemas Introdutórios

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo que possui dois lados opostos iguais e paralelos. Mostre que $ABCD$ é um paralelogramo.

Problema 4. Explique por que **ALL** não é um caso de congruência.

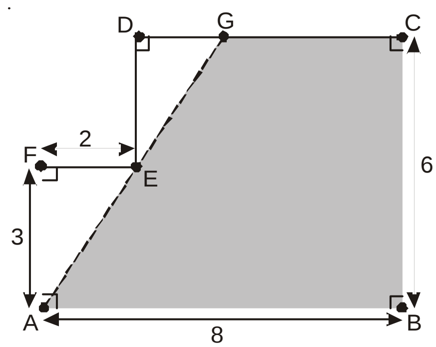
Problema 5. Mostre que um triângulo que tem duas alturas iguais é isósceles.

Problema 6. (OBM 2009 - 1ª Fase) Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP. Se $AB = 5$ cm, $AD = 8$ cm e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC?

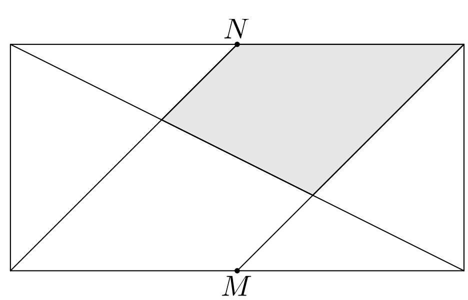


Problemas Propostos

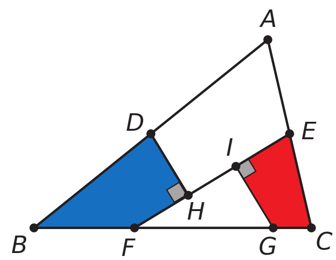
Problema 7. (OBMEP 2005 - 1ª Fase) A figura mostra um polígono $ABCDEF$ no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é a área do polígono $ABCG$?



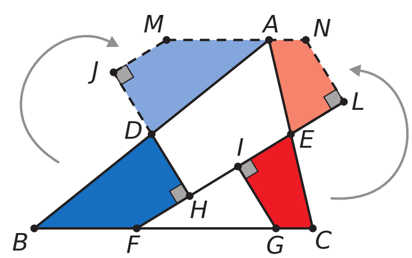
Problema 8. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) A figura representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



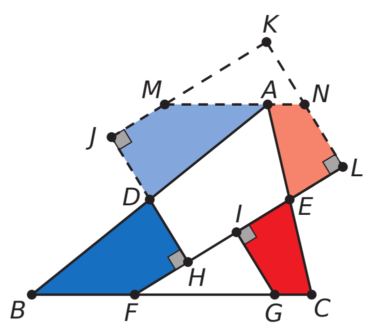
Problema 9. (OBMEP 2011 - 2ª Fase) Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$



a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $\angle MAN$ é igual a 180°.



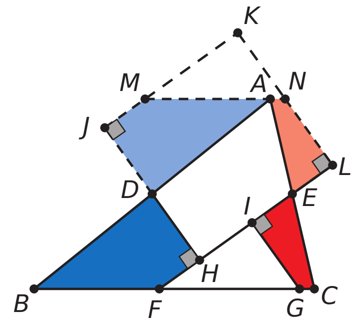
b) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



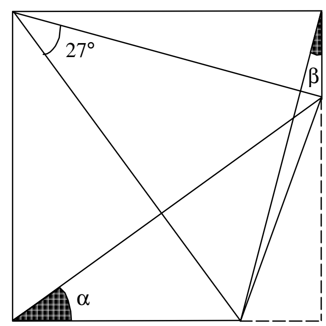
Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

c) Mostre que $LH = EF$.

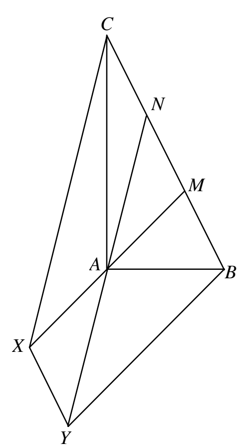
d) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.



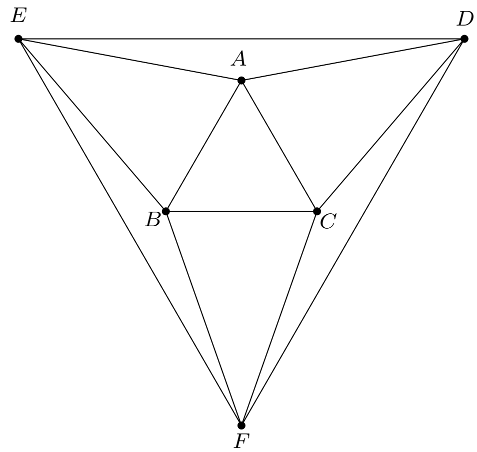
Problema 10. (OBM 2005 - 2ª Fase) O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura abaixo?



Problema 11. (OBM 2006 - 2ª Fase) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Considere M e N pontos sobre a hipotenusa BC tais que $CN = NM = MB$. Os pontos X e Y são tais que $XA = AM$ e $YA = AN$. Determine a área do quadrilátero $XYBC$, sabendo que o triângulo ABC tem área 12 cm^2.



Problema 12. Na figura a seguir ΔABC é equilátero e $AE = EB = BF = AD = CD$ de modo que o ΔABC é interno ao ΔDEF. Prove que ΔDEF é equilátero.



Problema 13. (Teorema de Thébault) Seja $ABCD$ um quadrado e ADE e DCF triângulos equiláteros construídos exteriormente ao quadrado. Mostre que EBF é um triângulo equilátero.

Problema 14. São construídos exteriormente ao triângulo ABC, os triângulos equiláteros ABM, BCN, ACP. Prove que $NA = BP = CM$.

Problema 15. Seja ABC um triângulo, $ABPQ$ e $ACRS$ são quadrados construídos externamente a este triângulo. Mostre que $BS = QC$.

Problema 16. (Rioplatense 2015) Seja $ABCD$ um quadrado de centro O. São construídos triângulos isósceles BCL e DCK externos ao quadrado com $DK = KC = LC = LB$. Seja M o ponto médio de CL. Mostre que BK e OM são perpendiculares.

Problema 17. $ABCD$ é um paralelogramo e ABF e ADE são triângulos equiláteros construídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que FCE também é equilátero.

Problema 18. Quatro quadrados são construídos exteriormente nos lados de um paralelogramo. Mostre que os centros destes quadrados também formam um quadrado.

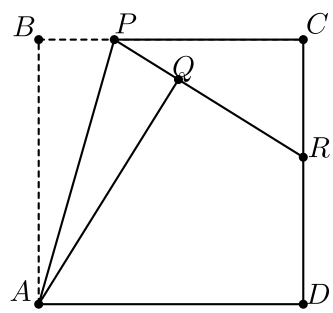
Problema 19. (Cone Sul 1989) Seja $ABECDF$ um hexágono (nesta ordem). De modo que $ABCD$ e $AECF$ são paralelogramos. Mostre que $BE \parallel DF$.

Problema 20. (Rioplatense 1995) Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$ e $B\hat{A}C = 36°$. Desenhamos a bissetriz de $A\hat{B}C$ que corta AC em D e desenhamos também a bissetriz de $B\hat{D}C$ que corta BC em P. Marca-se um ponto R na reta BC tal que B é o ponto médio do segmento PR. Mostre que $RD = AP$.

Problema 21. (Rússia 1946) Dados três pontos A, B e C sobre uma reta, são construídos triângulos equiláteros ABC_1 e BCA_1 no mesmo semi-plano em relação a reta dos pontos A, B e C. Sejam M e N os pontos médios de AA_1 e CC_1, respectivamente. Prove que o triângulo BMN também é equilátero.

Problema 22. (Inglaterra 1995) Seja ABC um triângulo retângulo em C. As bissetrizes internas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$ encontram BC e CA em P e Q, respectivamente. Sejam M e N os pés das perpendiculares a partir de P e Q até AB, respectivamente. Encontre a medida do ângulo $\angle MCN$.

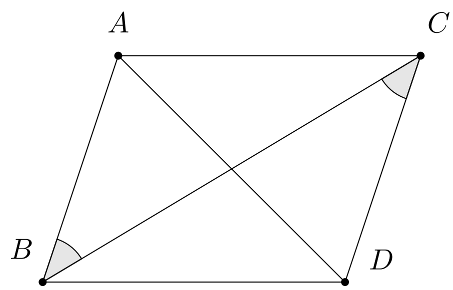
Problema 23. (Maio 2013) Seja $ABCD$ um quadrado de papel de lado 10 e P um ponto sobre o lado BC. Ao dobrar o papel ao longo da reta AP, o ponto B determina o ponto Q, como na figura a seguir. A reta PQ corta o lado CD em R. Calcular o perímetro do triângulo PCR.



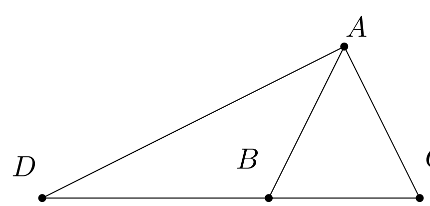
Problema 24. No triângulo ABC $(AB > AC)$ sejam BE e CF as alturas relativas aos vértices B e C. Seja P sobre BE e Q sobre a extensão $\overrightarrow{CF}$ tais que $BP = AC$, $CQ = AB$. Prove que AP e AQ são perpendiculares.

Dicas e Soluções

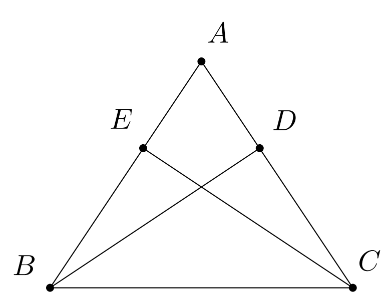
3. Seja $ABCD$ um quadrilátero com $AB = CD$ e AB paralelo a CD. Pelo caso LAL, os triângulos ABC e BCD são congruentes. Logo, $AC = BD$ e $\angle CAD = \angle ADB$. Portanto, o outro par de lados do quadrilátero são paralelos e iguais. Assim, concluímos que $ABCD$ é um paralelogramo.



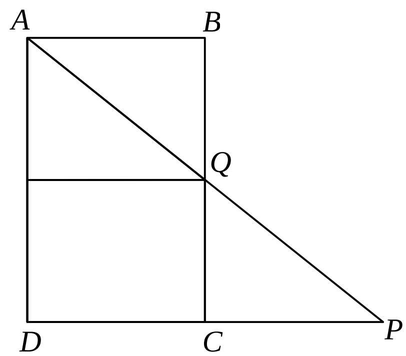
4. Considere um triângulo isósceles BAC com $BA = AC$ e um ponto sobre o prolongamento da reta BC, mais próximo de B. Veja que os triângulos DBA e DAC são tais que $\angle ADB = \angle ADC$, AD é compartilhado e $AB = AC$. Portanto, se encaixaria em um possível caso ALL. Porém, claramente percebemos que os triângulos não são congruentes uma vez que $CD > BC$.



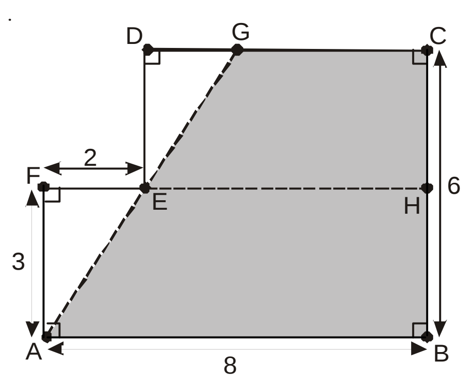
5. Sejam D e E os pés das alturas relativas aos vértices B e C, respectivamente. Em primeiro lugar, veja que $\angle ABD = \angle ACE = 90° - \angle BAC$. Agora note que os triângulos BEC e BDC são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa. Logo, $\angle DBC = \angle ECB$. Portanto, $\angle ABC = \angle ACB$ e, pelo exercício anterior, um triângulo com dois ângulo iguais será isósceles.



6. (OBM 2009 - 1ª Fase) Traçando uma paralela a DC por Q, temos que $[ABQ] = [AQM]$, já que suas bases e suas alturas terão a mesma medida. Logo Q é ponto médio de BC, ou seja, $BQ = QC$. Os ângulos opostos pelo vértice Q são congruentes, além disso os triângulos ABQ e QCP são retângulos. Dessa forma os triângulos ABQ e QCP são congruentes pelo caso ALA e com isso, $PC = AB = 5$.

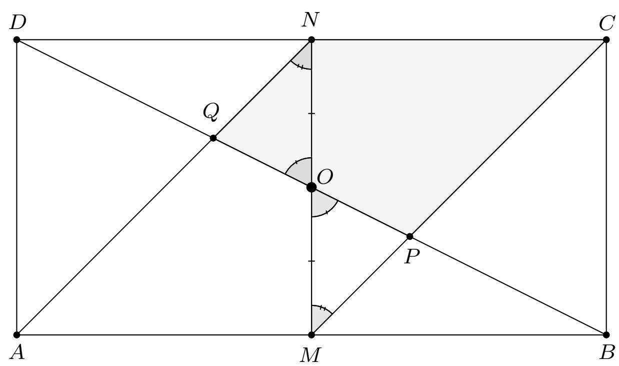


7. (OBMEP 2005 - 1ª Fase) A área pedida é igual a área do polígono $ABCDEF$ menos a soma das áreas dos triângulos retângulos AEF e DEG. A área do triângulo AEF é $\frac{AF \times EF}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3\ cm^2$. Vamos agora calcular a área do triângulo DEG. Para calcular DE prolongamos EF até o ponto H, obtendo assim os retângulos $ABHF$ e $CDEH$. Como os lados opostos de um retângulo são iguais, segue que $DE = CH = CB - BH = 6 - AF = 6 - 3 = 3$. Como os lados AF e DE são paralelos, então $\angle EAF = \angle GED$. Além disso $AF = ED$, logo os triângulos AEF e DEG são congruentes (caso ALA) e portanto, têm a mesma área. A área do retângulo $ABHF$ é $AD \times AF = 8 \times 3 = 24\ cm^2$, e a do retângulo $CDEH$ é $DE \times CD = 3 \times (AB - EF) = 3 \times (8 - 2) = 18\ cm^2$. Portanto a área procurada é $24 + 18 - 2x3 = 36\ cm^2$. Alternativamente, a área do trapézio $ABCG$ cuja altura é $BC = 6$ e cuja as bases são $AB = 8$ e $CG = CD - GD = 6 - 2 = 4$ pode ser calculada diretamente. Portanto a área é $\frac{8+4}{2} \times 6 = 36\ cm^2$.



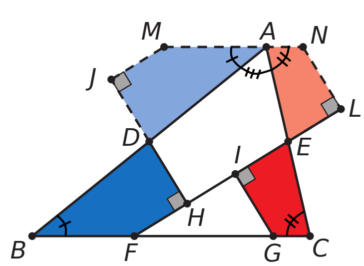
8. (OBMEP 2013 - 1ª Fase) Na figura a seguir o segmento MN é perpendicular aos lados

AB e CD, além disso, $ND = MB$ já que tanto M quanto N são pontos médios. Como os lados AB e CD são paralelos, temos que $\angle NDO = \angle MBO$, então os triângulos OND e OMB são congruentes pelo caso ALA. Em particular, $OM = ON$. Os triângulos AMN e CNM são congruentes pelo caso LAL, já que $AM = NC$, $\angle AMN = \angle CNM$ e MN é um lado comum. Em particular $\angle ANM = \angle CMN$. Os ângulos marcados na figura à partir do centro O do retângulo são congruentes por serem opostos pelo vértice. Finalmente, temos que os triângulos ONQ e OPM são congruentes pelo caso ALA, e portanto possuem a mesma área. A área do quadrilátero $CPQN$ é então igual à área do triângulo CMN, que por sua vez é igual a $\frac{1}{4}$ da área do retângulo, ou seja, igual a $\frac{1}{4} \times 120 = 30\ m^2$.



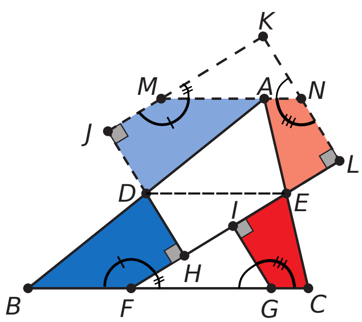
9. (OBMEP 2011 - 2ª Fase)

   a) 1ª solução - Na figura a seguir marcamos o ângulo em B do triângulo ABC e o ângulo correspondente no polígono $AMJD$; marcamos o ângulo em C do triângulo ABC e o ângulo correspondente do polígono $AELN$. Podemos observar na parte superior da figura que o ângulo $\angle MAN$ é a soma desses dois ângulos com o ângulo em A do triângulo ABC; como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, segue que $\angle MAN = 180°$. Logo M, A e N estão alinhados.

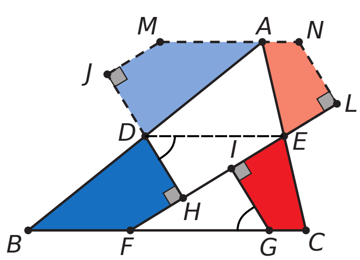


   2ª solução - Observamos primeiro que AM é paralelo a BF, pois ele é obtido de BF por meio de uma rotação de $180°$; do mesmo modo, AN é paralelo a CG. Como BF e CG estão na mesma reta suporte e AM e AN tem o ponto A em comum, segue que os pontos M, A e N estão alinhados.

b) Na figura os ângulos marcados sem traço, com um traço, dois traços e três traços são congruentes. Notamos agora que $MN = MA + AN = BF + CG = BC - FG = 2FG = FG = FG$ Segue pelo critério ALA que os triângulos FGI e MNK são congruentes.

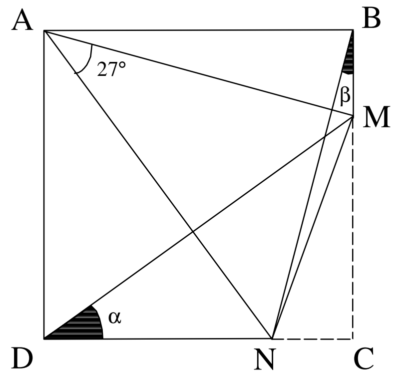


c) Na figura a seguir traçamos a base média DE do triângulo ABC. O teorema da base média nos diz que DE é paralelo a BC e que $DE = \dfrac{1}{2}BC = FG$. Segue que os triângulos FGI e EHD são congruentes, pois são retângulos, tem os ângulos verdes congruentes (pois são agudos de lados paralelos) e hipotenusas congruentes. Em particular, temos $FI = EH$, donde $FH = FI - HI = EH - HI = EI$. Logo, $LH = LE + EI + IH = FH + HI + IE = EF$.



d) A área do quadrado $HJKL$ é igual à área do triângulo ABC, que é 9; logo o lado do quadrado mede 3. Em particular, $LH = 3$ e segue do item anterior que $EF = 3$.

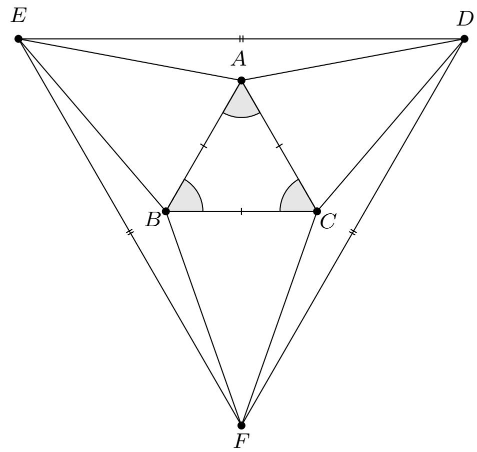
10. (OBM 2005 - 2ª Fase) Vamos denotar por A, B, C e D os vértices do quadrado e por MN o corte efetuado. Como $CM + CN = BC = CD$, resulta que $BM = CN$ e $DN = MC$. Em conseqüência, os triângulos ADN e DCM são congruentes, o mesmo ocorrendo com ABM e BCN (em cada caso, os triângulos são retângulos e possuem catetos iguais). Logo, $\angle DAN = \angle CDM = \alpha$ e $\angle BAM = \angle CBN = \beta$. Assim, $\alpha + \beta + 27° = 90°$ e $\alpha + \beta = 63°$.



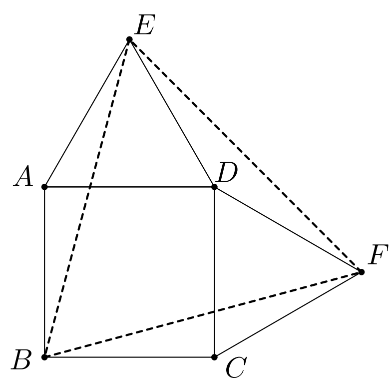
11. (OBM 2006 - 2ª Fase) Observe que os triângulos AXY e ANM são congruentes pelo caso LAL, portanto $\angle YXA = \angle AMN$. Assim, $XY \parallel MN$ e como $XY = MN = MC = NB$, segue que os quadriláteros $XYCM$ e $XYNB$ são paralelogramos, como A é ponto médio de XM e NY temos que $[AYC] = [BAX] = \dfrac{2}{3} \times 12 = 8$. Logo, $[XYCB] = \dfrac{8}{3} \times 12 = 32$.

12. Para mostrar que ΔDEF é equilátero, temos duas opções: mostrar que todos os seus lados são congruentes; ou mostrar que todos seus ângulos internos são congruentes. Vamos marcar todos os lados e ângulos congruentes para tentar enxergar qual caminho é melhor. Como ΔABC é equilátero, temos $\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = 60°$, além disso, por hipótese temos que $AE = EB = BF = CF = AD = CD$, desse modo temos que $\Delta EAB \cong \Delta FBC \cong \Delta DCA$ por LLL. Em particular, os ângulos correspondentes são congruentes nesses triângulos isósceles. Seja α a medida do ângulo da base de cada um desses triângulos isósceles.

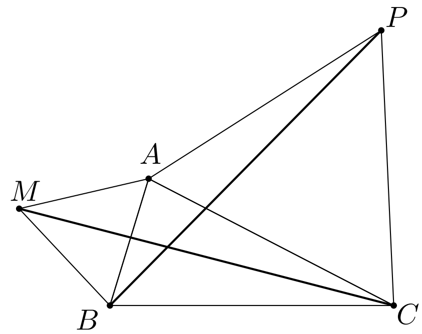
    Para mostrar que ΔDEF é equilátero, podemos mostrar que $\Delta EAD \cong \Delta FEB \cong \Delta DFC$ obtendo que $ED = DF = FE$. Veja que nesses três triângulos isósceles, se mostrarmos que os ângulos opostos à base são congruentes, temos as congruências desses triângulos por LAL. Tomemos o vértice A, temos que $\angle EAD + \angle EAB + \angle BAC + \angle CAD = 360° \Leftrightarrow \angle EAD + \alpha + 60° + \alpha = 360° \Leftrightarrow \angle EAD = 300° - 2\alpha$. De modo análogo, fazemos o mesmo processo com os vértices B e C, mostrando assim que $\Delta EAD \cong \Delta FEB \cong \Delta DFC$ por LAL, acarretando em $ED = DF = FE$, logo ΔDEF é equilátero.



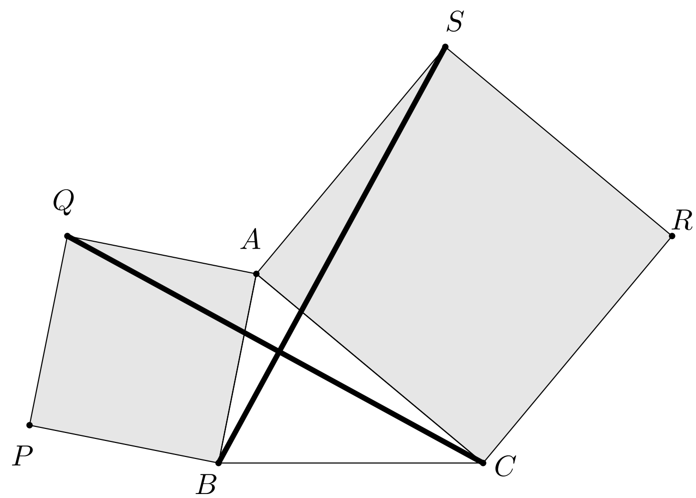
13. Por definição, $AB = AE = ED = DF$. Além disso, $\angle EAB = \angle EDF = 150°$. Logo, $\Delta BAE \equiv \Delta EDF$ (LAL). Consequente,ente, $BE = EF$. De modo análogo, $\Delta ABE \equiv \Delta CBF \Rightarrow BE = BF$. Assim, ΔBFE é equilátero.



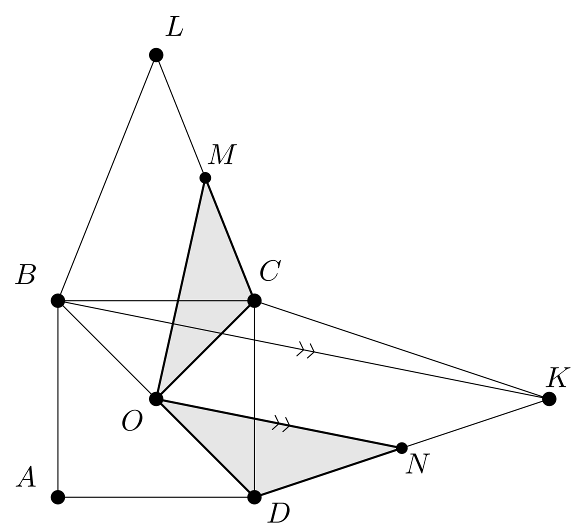
14. Veja que os triângulos ΔAMC e ΔABP são congruentes pelo caso LAL, pois $AB = AM$ e $AC = AD$ e $\angle MAC = \angle BAP$. Assim, $MC = BP$. De modo análogo, também provamos que o terceiro lado é igual a estes dois.



15. Note que $\Delta AQC \equiv \Delta ABS$ (LAL), pois $AB = AQ$, $\angle QAC = \angle BAS$ e $AC = AS$. Como consequência, $QC = BS$.



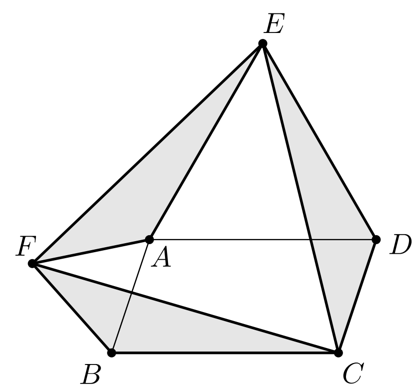
16. Primeiramente, observe que $\Delta BLC \equiv \Delta CKD$ (LLL). Sejam $\angle LCB = \angle LBC = \angle KCD = \angle KDC = \alpha$. Se N é o ponto médio de KD, veja que $\Delta ODN \equiv OCM$, pois $MC = ND$, $OD = OC$ e $\angle ODN = \angle OCM = \alpha + 45°$. Portanto, $\angle NOD = \angle COM = \beta$. Como $\angle COD = 90°$, segue que $\angle NOM = 90°$. Ou seja, $ON \perp OM$. Por outro lado, $ON \parallel BK$, pois ON é a base média do ΔDBK. Assim, $OM \perp BK$.



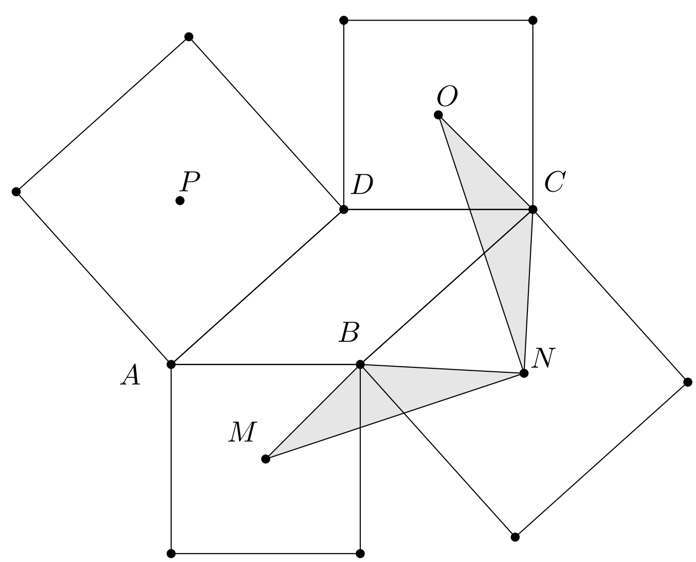
17. Seja $\angle ABC = \beta$. Assim, $\angle ADC = \beta$ e $\angle BAD = 180° - \beta$. Além disso,

$$\angle FAE = 360° - 60° - 60° - (180° - \beta) = 60° + \beta.$$

Agora veja que $\Delta EDC \equiv \Delta AFE \equiv \Delta BFC$ (LAL). Portanto, $FC = CE = EF$.



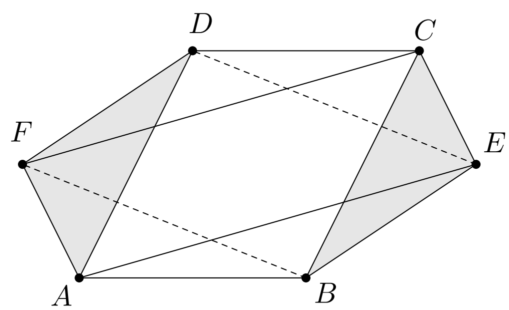
18. Sejam M, N, O e P os centros dos quadrados que estão sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Seja $\angle DAB = \beta$. Assim, $\angle DCB = \beta$ e $\angle CBA = 180° - \beta$. Veja que $\angle OCN = \angle NBM = 90° + \beta$. Veja que $\Delta OCN \equiv \Delta NBM$ (LAL). Logo, $\angle BNM = \angle ONC = \theta$ e $MN = NO$. Além disso, veja que $\angle BNC = 90°$. Portanto, $\angle ONM = 90°$. Por analogia, podemos demonstrar que todos os lados e todos os ângulos do quadrilátero $ONMP$ são iguais entre si.



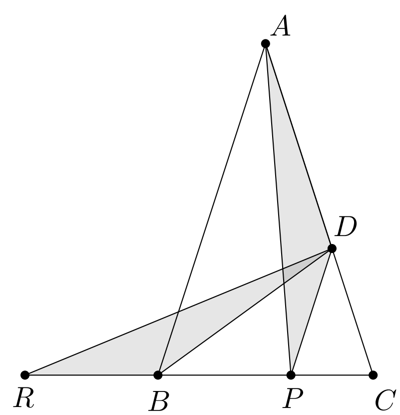
19. Sejam $\angle FAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ e $\angle EAB = \theta$. Sejam também P o ponto de encontro entre AD e CF; e Q o ponto de encontro entre CB e AE. Note que $AQCP$ é um parelelogramo, pois tem dois pares de lados opostos paralelos. Assim, $\angle PCQ = \beta$.

    Como $ABCD$ é um parelelogramo, $AD = CB$, $AB = CD$ e $\angle PCD = \theta$. De forma análoga, $AECF$ é um paralelogramo, então $AF = CE$ e $\angle BCE = \alpha$.

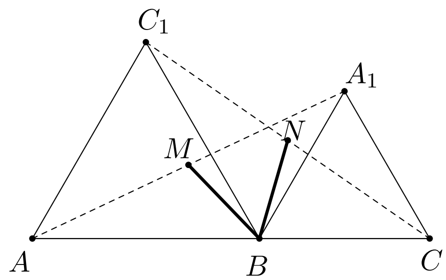
Agora note que $\Delta FAD \equiv \Delta BCE$ (LAL), logo $BE = FD$. Além disso, $\Delta DCE \equiv FAB$ (LAL), logo $FB = DE$. Podemo concluir que $BEDF$ é um paralelogramo, pois tem dois pares de lados opostos iguais. Portanto, $BE \parallel FD$.



20. Como ΔABC é isósceles, $\angle ABC = \angle ACB = 72°$. Logo, ΔABD é isósceles e $BD = DA$. Sendo BD bissetriz, $\angle ABD = \angle DBC = 36°$. Sendo DP bissetriz, $\angle BDP = \angle PDC = 36°$. Logo, ΔBPD é isósceles e $RB = BP = PD$. Por último, veja que $\angle RBD = \angle PDA = 180° - 36° = 144°$. Assim, $\Delta RBD \equiv \Delta PDA$ (LAL). Com isso, $AP = RD$.



21. Note que $ABA_1 \equiv CBC_1$ (pelo caso LAL). Assim, todas as medidas correspondentes nos dois triângulos são congruentes. Em particular, $BM = BN$ (as mediadas relativas aos lados AA_1 e CC_1 são iguais) e $\angle MBA_1 = \angle NBC$ (pois são as medidas dos ângulos entre as medianas e os lados correspondentes BA_1 e BC). Dessa última igualdade de ângulos, obtemos que $\angle MBN = 60°$. Portanto, ΔBMN é um triângulo isósceles com ângulo de 60°.

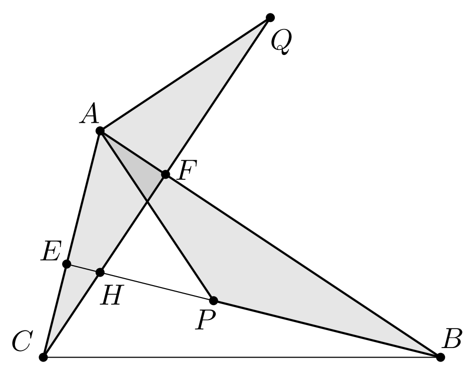


22. Seja $\angle CAB = 2\alpha$. Note que $\Delta AMP \equiv \Delta ACP$ (ALA), então $AM = AC$ e com isso, $\angle AMC = \angle ACM = 90° - \alpha$. De modo análogo, $\Delta QNB \equiv \Delta QCB$ (ALA), logo $BC = BN$ e com isso, $\angle CNB = \angle NCB = 45° + \alpha$. Agora olhando a soma dos ângulos internos no triângulo ΔCNM, temos que $\angle MCN = 45°$.

23. Veja que $\Delta ABP \equiv \Delta PQA$ (LAL). Logo, se $BP = x$, temos que $PQ = x$ e $PC = 10 - x$. De forma análoga, $\Delta QRA \equiv \Delta ARD$ (cateto-hipotenusa). Logo, se $RD = Y$, temos que $RQ = y$ e $CR = 10 - y$. Portanto, o perímetro do triângulo PCQ é 20.

24. Seja H o ponto de encontro entre as duas alturas. Seja $\angle FBP = \alpha$. Logo, $\angle FHB = 90° - \alpha = \angle EHC$. Daí, $\angle ECF = \alpha$. Com isso, $\Delta ACQ \equiv \Delta APB$ (LAL)[1].

    Sendo $\angle PAB = \beta$, a congruência citada nos garante que $\angle AQF = \beta$. No ΔAFQ, como $\angle AFQ = 90°$, segue que $\angle FAQ = 90° - \beta$. Portanto, $\angle PAQ = 90°$.



[1]Note que dessa congruência também podemos demonstrar que $AQ = AP$.