Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

Prof. Bruno Holanda

Aula 4

Raciocínio Lógico II

Nesta aula continuaremos o processo de desenvolvimento do raciocínio lógico. Inicialmente, vamos resolver a seguir algumas questões que perguntam se é possível que determinada configuração exista. Veremos que, nem sempre tais configurações existem. Neste caso, podemos demonstrar sua não-existência utilizando uma demonstração por absurdo. Neste tipo de solução verifica-se que hipótese contrária daquela que queremos demonstrar é incompatível com as demais hipóteses da questão. As próximas questões servirão como exemplos mais concretos do *método de redução ao absurdo*.

Problema 1. (Ivan Borsenco) É possível cortar um retângulo 5×6 em oito retângulos distintos com dimensões inteiras e lados paralelos aos lados do retângulo maior?

Solução. Vamos assumir que todos os retângulos são distintos. Os retângulos de menor área possível são:

Área 1: 1×1	Área 4: 2×2 e 1×4
Área 2: 1×2	Área 5: 1×5
Área 3: 1×3	Área 6: 2×3 e 1×6

Note que a menor área coberta por oito retângulos distintos deve ser pelo menos $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 > 30$. Logo é impossível obter 8 retângulos distintos. $\square$

Problema 2. Considere 100 números naturais não-nulos cuja soma é 5049. Mostre que existem dois destes números que são iguais.

Solução. Suponha que existam 100 naturais distintos cuja soma é 5049. Sejam a_1, a_2,..., a_{100} estes naturais e suponha ainda que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. Veja que o menor valor natural que a_1 pode assumir é 1, logo $a_1 \geq 1$. De forma análoga, podemos concluir que $a_2 \geq 2$, $a_3 \geq 3$ e assim por diante até que tenhamos $a_{100} \geq 100$. Somando todas estas desigualdades, temos:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \geq \underbrace{1 + 2 + \cdots + 99 + 100}_{=S}.$$

Por outro lado, podemos calcular a soma S utilizando a seguinte técnica: Primeiro, escreve-se a soma com os termos em sua ordem crescente

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100.$$

Em seguida, escreve-se a soma com os termos em ordem decrescente:

$$S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1.$$

Como a ordem não altera o resultado da adição, as suas somas são exatamente as mesmas. Agora, soma-se as duas equações, de modo a somar as *colunas* do lado esquerdos destas equações.

$$S + S = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101.$$

Veja que em cada coluna, o resultado da soma dos termos é sempre 101. Como há um total de 100 colunas, podemos concluir queremos

$$2S = 100 \times 101 = 10100$$

$$\Rightarrow S = 5050.$$

Ou seja, a soma de 100 naturais distintos é sempre pelo menos 5050, nunca podendo ser igual a 5049. Dessa forma, se a soma de 100 naturais é 5049, então é falsa a hipótese de que todos são distintos. Logo, há pelo menos dois iguais. $\square$

Problema 3. Dez amigos possuem juntos 29 moedas. Sabendo que cada garoto possui pelo menos uma moeda, mostre que existem três deles que possuem a mesma quantidade de moedas.
Solução. Sejam a_1, a_2,..., a_{10} as quantidades de moedas que garoto possui. Suponha que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{10}$ e que não existam três destes números iguais. Como cada garoto possui pelo menos uma moeda, então $a_1 \geq 1$. Da mesma forma, $a_2 \geq 1$. Veja que $a_3 > 1$, pois caso contrário $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Assim, $a_3 \geq 2$. Continuando de forma análoga, podemos verificar que $a_4 \geq 2$, $a_5 \geq 3$,..., $a_{10} \geq 5$. Portanto,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \geq 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 30.$$

Logo, se a soma é, na verdade, igual a 29, nossa hipótese de não termos três garotos com a mesma quantidade de moedas é incompatível com as demais hipóteses do problema. Logo, devemos ter pelo menos três garotos com a mesma quantidade de moedas. $\square$

Problema 4. Considere um grupo de 20 pessoas em uma festa. Algumas destas pessoas cumprimentaram outras usando apertos de mãos, de modo que cada par de pessoas não se cumprimenta mais de uma vez. Prove que sempre podemos encontrar duas pessoas que deram a mesma quantidade de apertos de mãos durante a festa.

Solução. Sejam a_1, a_2,..., a_{20} as quantidades de apertos de mãos que cada pessoa deu na festas. Suponha que todos estes números sejam distintos e que estejam em ordem crescente, i.e. $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$. O menor valor que a_1 pode assumir é zero. Neste caso, existe uma pessoa que não apertou a mão de ninguém. Já que assumimos que todas quantidades são distintas, devemos ter que $a_2 \geq 1$. De forma análoga, $a_3 \geq 2$, $a_4 \geq 3$ e assim por diante, até que demonstremos que $a_{20} \geq 19$. Por outro lado, a quantidade máxima de apertos de mão que uma pessoa pode dar na festa é 19. E neste caso, haverá alguém que cumprimentou todas as outras pessoas da festas. Esta conclusão contradiz o fato de existir alguém que não cumprimentou ninguém. $\square$

Finalizaremos esta aula com mais alguns problemas de lógica:

Problema 5. (*Olimpíada Cearense de Matemática*) No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:
- Marcondes: estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior;
Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversa.
- Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
- Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
- Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
- Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
- Francisco: não sei o número que Fernando recebeu;
- Fernando: não sei o número que Francisco recebeu;
- Francisco: agora eu sei o número que o Fernando recebeu;
- Fernando: agora eu também sei o número que Francisco recebeu;

Quais os números recebidos por cada um deles?

Solução. Apesar de parecer um pouco confuso, este é um problema bem formulado e muito interessante. Seu segredo está em uma propriedade fundamental do conjunto dos números inteiros positivos: ele possui um menor elemento (o número 1) que não possui antecessor. Primeiramente, veja que Francisco não recebeu o número 1, pois se este fosse o caso, ele saberia imediatamente que Fernando havia recebido o número 2. Além disso, ao falar que não sabe o número de seu amigo, Fernando também deduz que Francisco não recebeu o número 1. Dessa forma, podemos concluir que Fernando não recebeu o número 2. Pois, se fosse este o caso, ele saberia que Francisco haveria recebido o número 3. Além disso, ao escutar a primeira afirmação de Fernando, Francisco também deduz que Fernando não recebeu o número 2. Continuando este raciocínio de forma análoga, podemos perceber que:

- Francisco não recebeu o número 3;
- Fernando não recebeu o número 4;
- Francisco não recebeu o número 5;

- Fernando não recebeu o número 6;

Agora, veja que Francisco recebeu o número 7. Pois é a única forma dele ter descoberto o número de Fernando com as deduções anteriores. De fato, ao receber o número 7, ele ficará na dúvida se Fernando recebeu o número 6 ou o número 8. E a dúvida é solucinada apenas quando ele percebe que Fernando não recebeu o número 6. Além disso, com a última afirmação de Francisco, Fernando também conclui que Francisco recebeu a carta 7 e por isso, sua última afirmação é uma certesa sobre o número de Francisco. $\square$

Problema 6. Certo dia, um funcionário do Senso Demográfico bate na porta da casa de uma senhora e pergunta:
- Quantos filhos a senhora possui?
- Tenho três filhos. E o produto das idades deles é 36.
- Com esta informação é impossível descobrir a idade de cada um deles.
- A soma das idades deles é igual ao número de janelas daquele prédio. - diz a senhora apontando para a construção a frente.
- Bem, isso ajuda, mas ainda não tenho como saber as idades de seus filhos.
- O mais velho toca piano.
- Ah! Agora posso saber todas as idades!

Quantos anos tem cada um dos filhos?

Solução. Vamos listar todas as triplas ordenadas de inteiros positivos cujos produtos de seus termos é igual a 36.

$$(1,1,36); \qquad (1,2,18);$$
$$(1,3,12); \qquad (1,4,9);$$
$$(1,6,6); \qquad (2,2,9);$$
$$(2,3,6); \qquad (3,3,4);$$

Como existem oito possibilidades, é impossível determinar a idade de cada um dos filhos. Agora, calculemos a soma dos elementos em cada uma dessas triplas:

$$1+1+36=38; \qquad 1+2+18=21;$$
$$1+3+12=16; \qquad 1+4+9=14;$$
$$1+6+6=13; \qquad 2+2+9=13;$$
$$2+3+6=11; \qquad 3+3+4=12;$$

Apesar de não sabermos qual é quantidade de janelas do prédio, o funcionário do Senso sabia (ele pode contar). Se ele não conseguiu deduzir as idades de cada um dos filhos, significa que esta infomação não é suficiente. A única possibilidade disto ter ocorrido é se a quantidade de janelas do prédio for 13. De fato, este é o único número para o qual existem duas triplas listadas cujas somas de seus elemento sejam as mesmas. Desta forma, ficamos apenas com duas possibilidades

$$(1, 6, 6); \qquad e \qquad (2, 2, 9);$$

Por outro lado, apenas a segunda possui um filho mais velho. Logo, a idade dos filhos desta senhora são $2, 2, 9$. □

Problemas Propostos

Problema 7. Existem cinco inteiros cuja soma é 101. Mostre que podemos encontrar dois deles cuja soma é pelo menos 41.

Problema 8. Existem sete inteiros cuja a soma é 36 ao redor de um círculo. Mostre que existem dois vizinhos cuja soma é pelo menos 11.

Problema 9. Sejam a, b, c, d, e, f números reais com a seguinte propriedade:

$$f(a - b + c - d + e) < 0$$

$$a(b - c + d - e + f) < 0$$

Demonstre que $af < 0$.

Bibliografia Recomendada

Alguns dos exercícios propostos nesta aula foram retirados da seguinte referência:

1. **Metoda reducerii la absurd**. Liliana Niculescu. Editura Gil

Outra fonte de problemas são as páginas da Olimpíada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`) e da Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (`www.obmep.org.br`).

Dicas e Soluções

7. Sejam a, b, c, d, e estes cinco inteiros tais que $a + b + c + d + e = 101$. Suponha que quaisquer dois destes números possuam soma no máximo 40. Veja que existem dez pares de números que podemos formar escolhendo dois destes cinco números. Dessa forma, temos

$$\begin{array}{ll} a + b \leq 40, & a + c \leq 40, \\ b + c \leq 40, & a + d \leq 40, \\ c + d \leq 40, & b + d \leq 40, \\ d + e \leq 40, & b + e \leq 40, \\ e + a \leq 40, & c + d \leq 40. \end{array}$$

Somando todas essas dez desigualdades, temos:

$$4 \times (a + b + c + d + e) \leq 10 \times 40 = 400.$$

Desta última, concluimos que $a + b + c + d + e \leq 100$ que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto, devemos ter dois cuja soma é pelo menos 41. $\square$

8. Sejam a, b, c, d, e, f, g os sete números que estão ao redor do círculo (no sentido horário). Suponha que quaisquer dois vizinhos tenham soma no máximo 10. Assim,

$$\begin{array}{ll} a + b \leq 10, & e + f \leq 10, \\ b + c \leq 10, & f + g \leq 10, \\ c + d \leq 10, & g + a \leq 10, \end{array}$$
$$d + e \leq 10.$$

Somando todas estas desigualdades, temos que

$$2 \times (a + b + c + d + e + f + g) \leq 7 \times 10 = 70.$$

Desta última, concluimos que $a + b + c + d + e + f + g \leq 35$ que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto, devemos ter dois vizinhos cuja soma é pelo menos 11. $\square$

9. Primeiramente, veja que a e f são não-nulos. Caso contrário, pelo menos um dos números $f(a - b + c - d + e)$ ou $a(b - c + d - e + f)$ seria zero. Agora suponha que $af > 0$. Isso significa que a e f possuem o mesmo sinal. Considere o caso em que ambos são positivos. Assim, temos:

$$(a - b + c - d + e) < 0$$

$$(b - c + d - e + f) < 0$$

Somando estas duas desigualdades obtemos que $a+f<0$ contradizendo o fato de a e f serem positivos. Agora considere o caso em que ambos a e f são negativos. Assim, temos:

$$(a-b+c-d+e)>0$$

$$(b-c+d-e+f)>0$$

Somando estas duas desigualdades obtemos que $a+f>0$ contradizendo o fato de a e f serem negativos. Como em todos os casos, nossa hipótese de $af>0$ se torna incompatível com as demais premissas, podemos concluir que $af<0$. $\square$