Polos Olímpicos de
Treinamento Intensivo

Problemas Resolvidos

Nível 3

Desigualdades I

Problemas

1 Desigualdades Básicas

Problema 1. Sejam a, b, c e d reais positivos. Suponha que $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$. Prove que

$$\frac{a+b}{b} \geq \frac{c+d}{d}.$$

Problema 2. Suponha que $0 < b < a < 1$. Prove que

$$\frac{1-ab}{a-b} > 1.$$

Problema 3. Mostre que $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Encontre todos os pares (x, y) de números reais que satisfazem

$$(4x^2+4x+3)(y^2-6y+13) = 8.$$

Problema 5. Sejam x, y e z reais positivos. Prove que

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z).$$

2 Desigualdade das Médias

Problema 6. Sejam a e b reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Quando a igualdade se verifica?

Problema 7. Sejam a e b reais positivos. Prove que

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Problema 8. Sejam a, b e c reais positivos. Mostre que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Problema 9. Prove que, dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro p, o quadrado é o que possui a maior área.

Problema 10. Prove que, dentre todos os triângulos com o mesmo perímetro p, o triângulo equilátero é o que possui a maior área.

3 Desigualdades Homogêneas

Problema 11. Mostre que as médias aritmética e geométrica são homogêneas de grau 1.

Problema 12 (IMO - adaptado)**.** Sejam x, y e z números reais não-negativos satisfazendo $x+y+z=1$. Prove que

$$0 \leq xy+yz+zx-2xyz.$$

Problema 13 (Nesbitt)**.** Sejam a, b e c reais positivos. Demonstre que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Problema 14. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ reais positivos. Prove que

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Problema 15. Sejam $a, b, c \geq 0$. Prove que

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Problema 16. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ reais positivos. Prove que

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Problema 17 (Irã)**.** Sejam a, b e c reais maiores do que 1 tais que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$. Prove que

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}.$$

5 Desigualdade do Rearranjo

Problema 18. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. Prove que

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geq a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_na_1.$$

Problema 19. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{2a}{(b+c)^2}+\frac{2b}{(c+a)^2}+\frac{2c}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Problema 20. Sejam a, b e c reais positivos. Prove que

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Soluções

1. O objetivo deste problema era exercitar a manipulação de desigualdades, apenas. Como $\frac{b}{b} = 1 = \frac{d}{d}$,

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{b} \geq \frac{c+d}{d} &\iff \frac{a+b}{b} - \frac{b}{b} \geq \frac{c+d}{d} - \frac{d}{d} \\ &\iff \frac{a+b-b}{b} \geq \frac{c+d-d}{d} \\ &\iff \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}.\end{aligned}$$

2. Outro problema para exercitar a manipulação. Como $a - b > 0$,

$$\frac{1-ab}{a-b} > 1 \iff 1 - ab > a - b \iff 1 - ab - a + b > 0.$$

Agora, é só fatorar: temos $1 - ab - a + b = (1-a)(1+b)$. Como $1 - a > 0$ e $1 + b > 0$, concluímos que a desigualdade original se verifica.

3. É uma mera questão de enxergar os quadrados:

$$\begin{aligned}2(x^2+y^2+1) - 2(xy+x+y) &= (x^2+y^2-2xy) + (x^2+1-2x) + (y^2+1-2y) \\ &= (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2.\end{aligned}$$

Sendo soma de quadrados, $2(x^2+y^2+1) - 2(xy+x+y)$ é maior que ou igual a zero. Assim, $2(x^2+y^2+1) \geq 2(xy+x+y)$, isto é, $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$.

4. Observe que $4x^2+4x+3 = (2x+1)^2+2$, e $y^2-6y+13 = (y-3)^2+4$. Assim, $4x^2+4x+3 \geq 2$, e $y^2-6y+13 \geq 4$. Para que o produto das duas expressões seja exatamente 8, precisamos ter igualdade nas duas desigualdades. Assim, precisamos ter $2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$, e $y - 3 = 0 \iff y = 3$. Logo, o único par de números reais que satisfaz a condição dada é $(-\frac{1}{2}, 3)$.

5. A chave é observar que, se $a = xy$, $b = yz$ e $c = zx$, então $ab + bc + ca = xy^2z + xyz^2 + x^2yz = xyz(x+y+z)$. Por que isso resolve o problema? Como mostramos em aula, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, quaisquer que sejam a, b e c números reais. Assim,

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^2 &= (a+b+c)^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &\geq 3(ab+bc+ac) = 3xyz(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

6. Pela desigualdade das médias,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

A desigualdade se verifica quando $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, isto é, quando $a^2 = b^2 \iff a = b$ (veja que, como os números são positivos, a igualdade entre os seus quadrados implica a igualdade entre eles).

7. Basta manipular:

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}\\ &\iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}\\ &\iff 2(a^2+b^2) \geq a^2+b^2+2ab\\ &\iff a^2+b^2 \geq 2ab.\end{aligned}$$

Essa aí é exatamente a desigualdade das médias aplicada a a^2 e b^2.

8. Pela desigualdade das médias, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ e $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Multiplicando as desigualdades, obtemos $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

9. Se um retângulo de perímetro p possui lados de medidas a e b, então $2a+2b=p$, e a área do retângulo é igual a ab. Pela desigualdade das médias,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \text{isto é,} \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p/2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

ou seja, a área do retângulo é menor que ou igual a $\frac{p^2}{16}$. Também pelo teorema da desigualdade das médias, a igualdade pode ocorrer, e ocorre exatamente quando $a=b$. Portanto, dentre todos os retângulos de perímetro p, o quadrado (aquele em que os lados são iguais) é o de maior área - e esta área é exatamente igual a $\frac{p^2}{16}$.

10. Consideremos um triângulo de perímetro p, e chamemos as medidas dos seus lados de a, b e c e a sua área de A. Pela definição do perímetro, $a+b+c=p$. Utilizaremos a *Fórmula de Heron para a área de um triângulo*:

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

Pela desigualdade das médias,

$$\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right) \leq \left(\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{p/2}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{6}\right)^3.$$

Assim,

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2}\cdot\frac{p^3}{6^3}} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

A igualdade ocorre quando temos igualdade na desigualdade das médias. Pelo teorema da desigualdade das médias, isso acontece exatamente quando $\frac{p}{2}-a=\frac{p}{2}-b=\frac{p}{2}-c$, ou seja, exatamente quando $a=b=c$.

Portanto, dentre todos os triângulos de perímetro p, o equilátero (aquele em que os lados são todos iguais) é o que possui a maior área - e esta área é igual a $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$.

11. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos. A *média aritmética* é a quantidade

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Se t é um número real positivo, então a média aritmética de $ta_1, ta_2, \ldots, ta_n$ é

$$\frac{ta_1 + ta_2 + \cdots + ta_n}{n} = t\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big),$$

que é exatamente t vezes a média aritmética de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Assim, a média aritmética é uma função homogênea de grau 1.

Por outro lado, a *média geométrica* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é a quantidade

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Se, mais uma vez, t é um número real positivo, então a média geométrica de $ta_1, ta_2, \ldots, ta_n$ é

$$\sqrt[n]{(ta_1)(ta_2)\cdots(ta_n)} = t\,\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

que é exatamente t vezes a média geométrica de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dessa forma, a média geométrica também é uma função homogênea de grau 1.

12. Vamos homogeneizar! Como $x + y + z = 1$,

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \iff 2xyz \le xy + yz + zx \iff 2xyz \le (xy + yz + zx)(x + y + z).$$

Mas

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) = 3xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

Como os números são não-negativos, $xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \ge 0$. Assim, $3xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \ge 2xyz$, e a desigualdade está provada.

13. Como a desigualdade é homogênea, podemos supor, sem perdas, que $a + b + c = 1$. Assim, a desigualdade se transforma em

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \ge \frac{3}{2}.$$

Para todo número real x,

$$\frac{9}{4}\Big(\frac{1}{3} - x\Big)^2 \ge 0,$$

isto é,

$$\frac{9x^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3x}{2} \ge 0 \iff x \ge \frac{5x}{2} - \frac{9x^2}{4} - \frac{1}{4} \iff \frac{x}{1-x} \ge \frac{9x}{4} - \frac{1}{4}.$$

Aplicando essa desigualdade a a, b e c e somando, obtemos

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \ge \frac{9}{4}(a + b + c) - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

P.S.: Curioso para saber de onde saiu a ideia de considerar a estranhíssima expressão $\frac{9}{4}\big(\frac{1}{3} - x\big)^2$? O $\big(\frac{1}{3} - x\big)^2$ veio do fato de que a desigualdade do enunciado é uma igualdade quando $a = b = c = \frac{1}{3}$. Assim, todas as desigualdades que utilizarmos na solução devem se reduzir a uma igualdade nesse caso. A aparição do $\frac{9}{4}$ fica como tarefa para você investigar.

14. Como os números são todos positivos, podemos trabalhar com as raízes deles. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz às sequências $\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}$ e $\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}$, obtemos

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \cdots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 = n^2.$$

15. Frações em uma desigualdade? Lema de Titu! Aplicando o lema às sequências $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(a+b,\ b+c,\ c+a)$, obtemos

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{(3\sqrt{2})^2}{2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

16. Como estamos lidando com números reais positivos, podemos elevar ambos os lados da desigualdade ao quadrado. Vemos, com isso, que ela é equivalente a

$$a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_1^2 + \cdots + b_n^2 + 2\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Cancelando os termos repetidos, ficamos com

$$2a_1b_1 + \cdots + 2a_nb_n \leq 2\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2},$$

que é equivalente a

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

Esta última desigualdade se verifica porque é Cauchy-Schwarz aplicada às sequências $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$. Portanto, a desigualdade do enunciado da questão também se verifica.

17. É uma única aplicação de Cauchy-Schwarz, mas encontrar a aplicação perfeita não é tão simples assim. Utilizaremos as sequências $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ e $\left(\sqrt{1 - \frac{1}{a}},\ \sqrt{1 - \frac{1}{b}},\ \sqrt{1 - \frac{1}{c}}\right)$. Aplicando Cauchy-Schwarz, ficamos com

$$\sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{b} + 1 - \frac{1}{c}} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}.$$

Como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$,

$$\sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{b} + 1 - \frac{1}{c}} = \sqrt{a+b+c},$$

e o problema está resolvido.

18. Esta é uma simples aplicação do teorema da desigualdade do rearranjo: sejam quais forem as relações de grandeza entre os números da sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a soma dos quadrados deles é a maior soma possível dentre as que obtemos quando dividimos todos os números em pares, cada número aparecendo em exatamente dois pares, exatamente uma vez em cada um, ou exatamente em um par, duas vezes, e somamos os produtos de cada par.

Em outras palavras, quando aplicamos a desigualdade do rearranjo às formas ordenadas das sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, vemos que a maior soma dentre as que a desigualdade considera é $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Em particular,

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1.$$

19. Como a desigualdade é simétrica em a, b e c, podemos supor que

$$a \geq b \geq c.$$

Dessa forma, teremos

$$\frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Pela desigualdade do rearranjo, segue então que

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{b}{(b+c)^2} + \frac{c}{(c+a)^2} + \frac{a}{(a+b)^2}$$

e

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{c}{(b+c)^2} + \frac{a}{(c+a)^2} + \frac{b}{(a+b)^2}.$$

Somando as duas desigualdades, ficamos com

$$\frac{2a}{(b+c)^2} + \frac{2b}{(c+a)^2} + \frac{2c}{(a+b)^2} \geq \frac{b+c}{(b+c)^2} + \frac{c+a}{(c+a)^2} + \frac{a+b}{(a+b)^2} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}.$$

20. Como a desigualdade é simétrica em a, b e c, podemos supor, sem perdas, que $a \geq b \geq c$. Temos, então,

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \quad \text{e} \quad \frac{a}{bc} \geq \frac{b}{ca} \geq \frac{c}{ab}.$$

Por rearranjo, isso implica

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a^2 \cdot \frac{b}{ca} + b^2 \cdot \frac{c}{ab} + c^2 \cdot \frac{a}{bc} = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

Mas

$$ab \geq bc \geq ca \quad \text{e} \quad \frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a},$$

donde

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq ab \cdot \frac{1}{b} + bc \cdot \frac{1}{c} + ca \cdot \frac{1}{a} = a + b + c.$$

Dessa forma,

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$