Problemas Resolvidos

Nível 2

Invariantes II

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. (OBM 2012) Zoroastro escreveu os números $1, 2, \ldots, 100$ em um quadro negro. Ele irá executar algumas operações que reduzirão a quantidade de números até que reste apenas um único número no quadro. A primeira operação consiste em escolher dois números quaisquer a e b e trocá-los por $a + b - 1$. A segunda operação consiste em novamente escolher dois números quaisquer a e b e trocá-los por $a + b - 2$. Em geral, depois de executar k operações, a nova operação será escolher dois números quaisquer a e b e substituí-los por $a + b - (k + 1)$. Determine qual o número que restará no final.

Problema 2. Em uma fábrica de cartões existem três máquinas. A primeira recebe um cartão (a, b) e retorna um cartão $(a + 1, b + 1)$. A segunda recebe um cartão $(2a, 2b)$ e retorna um cartão (a, b). A terceira recebe dois cartões (a, b) e (b, c) e retorna o cartão (a, c). Todas as máquinas também retornam o(s) cartão(ões) dados. É possível fabricar cartão $(1, 1988)$ se temos inicialmente apenas um cartão $(5, 19)$?

Problema 3. Uma professora escreveu três números reais no quadro e pediu para Dimas que diminuísse um deles em 3%, aumentasse o outro em 4% e diminuísse o outro em 5%. Dimas anotou os resultados em seu caderno e notou que os números que havia anotado eram os mesmos números no quadro, porém em ordem diferente. Prove que Dimas cometeu algum erro.

Problema 4. Todos os inteiros de 1 a 1.000.000 são escritos num quadro. Então, cada um destes números é substituído pela soma de seus algarismos. Estas substituições são realizadas repetidas vezes até que tenhamos 1.000.000 números com 1 algarismo cada. Dos números que restaram no quadro, qual aparece mais vezes: o 1 ou o 2?

Problema 5. (Torneio das Cidades 1985) Na ilha de Camelot vivem 13 camaleões roxos, 15 verdes e 17 amarelos. Quando dois camaleões de cores distintas se encontram, mudam simultaneamente para a terceira cor. Poderia dar-se a situação na qual todos tenham a mesma cor?

Problema 6. (Cone Sul 2014) Em uma lousa, estão escritos os números inteiros de 1 a 2014, inclusive. A operação válida é escolher dois números a e b, apagá-los e no lugar deles escrever o mínimo múltiplo comum de a e b, e o máximo divisor comum de a e b. Demonstre que, não importando a quantidade de operações realizadas, a soma dos números escritos na lousa é sempre maior do que $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$.

Problema 7. Estando algumas pilhas de discos numa mesa, um movimento admissível é escolher uma pilha, descartar um dos seus discos e dividir o que resta da pilha em duas pilhas não vazias, não necessariamente iguais.

Inicialmente, há sobre a mesa uma pilha e esta tem 1000 discos. Determine se é possível, depois de alguma sucessão de movimentos admissíveis, chegar a uma situação onde cada pilha tenha exatamente 3 discos.

Problema 8. É dado um triângulo no plano. A cada passo, podemos escolher um vértice e trocá-lo pelo seu simétrico em relação a algum outro vértice do triângulo. Se o triângulo inicial é equilátero, prove que após realizarmos uma sequência dessas alterações, não é possível encontrar um triângulo de perímetro menor.

Problema 9. Doze anões vivem em uma floresta e cada um deles tem uma casa que é pintada de vermelho ou azul. No i-ésimo mês de cada ano, o i-ésimo anão visita todos os seus amigos e se encontra a maioria deles vivendo em casas de cor diferente da sua própria, ele decide juntar-se a eles e muda a cor de sua casa. Mostre que, depois de algum tempo, nenhum anão precisará mudar a cor de sua casa. (As amizades são mútuas e permanentes).

Problema 10. Inicialmente, existem n números 1 escritos em um quadro. Cada passo consiste em escolher dois números a e b escritos no quadro, apagá-los, e em seu lugar escrever $\frac{a+b}{4}$. Mostre que, no fim deste processo, resta um número maior ou igual a $\frac{1}{n}$.

Problema 11. (Bulgária 2004) Considere todas as "palavras" formadas por a's e b's. Nestas palavras podemos fazer as seguintes operações:

- Trocar um bloco *aba* por um bloco b,
- trocar um bloco *bba* por um bloco a.

Podemos fazer também as operações de maneira reversa. É possível obter a sequência $b\underbrace{aa\ldots a}_{2003}$ a partir de $\underbrace{aa\ldots a}_{2003}b$?

Problema 12. (China 1986) Em uma lista com 3972 números, cada um dos números de 1 a 1986 foi escrito exatamente duas vezes. É possível que, para todo $k = 1, 2, \ldots, 1986$, existam exatamente k números entre as duas aparições de k na lista?

Problema 13. Vários gafanhotos estão no chão em uma fila. A cada minuto, um gafanhoto, que não seja o primeiro da fila, pula sobre o gafanhoto à sua frente. Ou seja, sendo a o gafanhoto imediatamente à frente do gafanhoto que pula e b o gafanhoto imediatamente à frente de a, o gafanhoto que pula o faz de maneira a aterrissar entre a e b. Prove que depois de 2021 minutos os gafanhotos não podem estar novamente na posição original.

Problema 14. (OBM 2018) Numa lousa estão escritos inicialmente os números $1, 2, \ldots, 10$. Para quaisquer dois números a e b na lousa, chamamos $S(a, b)$ a soma dos números na lousa com exceção de a e b. Uma operação permitida é escolher dois números a e b, apagá-los e escrever o número $a + b + \frac{ab}{S(a,b)}$.

Após realizar essa operação algumas vezes restam na lousa apenas dois números, x e y, com $x \geq y$.

a) Quantas operações foram realizadas?

b) Determine o maior valor possível para x.

Problema 15. (Torneio das Cidades 2015) Damião irá distribuir doces para a criançada. Ele tem k exemplares de cada um dos n tipos de doce que possui. Ele os distribui aleatoriamente em k sacolas, cada uma delas com n doces, e distribui-as para as crianças, uma sacola para cada uma. Para poder experimentar todos os tipos de doces, as crianças organizaram a seguinte regra para a troca de doces: se uma delas não possui doce do tipo i mas tem algum do tipo j e outra criança tem algum doce do tipo i mas não possui doce do tipo j, então elas podem trocar entre elas um doce dos tipo i por um doce do tipo j. Prove que elas podem organizar uma sequência de trocas de maneira que, ao fim do processo, cada uma delas possua um doce de cada tipo.

Problema 16. (Rússia 1997) Temos uma fileira longa de copos e n pedras no copo central (copo 0). Os seguintes movimentos são permitidos:

- Movimento tipo A: Se há pelo menos uma pedra no copo i e pelo menos uma no copo $i+1$ podemos fazer uma pedra que está no copo $i+1$ pular para o copo $i-1$ eliminando uma pedra do copo i.

- Movimento tipo B: Se há pelo menos duas pedras no copo i podemos pular uma pedra para o copo $i+2$ e outra para o copo $i-1$.

Demonstre o seguinte fato: fazendo os movimentos tipo A ou B durante um tempo suficientemente longo sempre chegamos a uma configuração a partir da qual não é possível fazer nenhum desses dois tipos de movimento. Além disso, essa configuração final não depende da escolha de movimentos durante o processo.

Soluções

1. Observe que, a cada passo i, a soma dos números escritos no quadro diminui de i. No total, serão realizados 99 passos. A soma dos números no quadro inicial é

$$1 + 2 + \cdots + 100,$$

e após 99 passos será

$$(1 + 2 + \cdots + 100) - (1 + 2 + \cdots + 99) = 100,$$

e portanto o número que sobra é 100.

2. Note que a terceira máquina só pode ser utilizada quando temos pelo menos duas cartas à disposição, e a segunda máquina só pode ser usada quando temos uma carta cujos números são pares. Isto significa que no primeiro passo utilizamos a primeira máquina.

Considere as diferenças entre os números escritos em cada carta. Seja d um inteiro ímpar. Dada uma carta (a, b), se d divide $a - b$, então divide $(a + 1) - (b + 1)$, ou seja, ainda divide a diferença dos números escritos na carta que é devolvida pela primeira máquina.

Em contrapartida, dada uma carta $(2a, 2b)$, se d é tal que $d \mid 2a - 2b$, então d também divide $a - b$, pois é ímpar. Além disso, se d divide $a - b$ e d divide $b - c$, então d divide $a - c = (a + b) + (b - c)$.

Segue, portanto, que se d divide a diferença entre os números escritos em cada uma das cartas que temos à disposição, após a realização de qualquer uma das possíveis operações, obtemos uma nova carta e d ainda divide a diferença dos números nela escritos. Logo, se d divide a diferença entre os números escritos na carta original, então dividirá as diferenças entre os números escritos em qualquer carta que as máquinas irão devolver ao longo do processo.

Para o nosso problema, note que $d = 7$ divide a diferença associada à carta original, mas d não divide $1988 - 1 = 1987$, então não é possível fabricar o cartão pedido.

3. Sejam a, b e c os números escritos pela professora no quadro, nesta ordem. Os números copiados por Dimas em seu caderno deveriam ser $0,97 \cdot a$, $1,04 \cdot b$ e $0,95 \cdot c$. O produto dos números no quadro é abc, já o produto dos números anotados no caderno deveria ser $0,97 \cdot 1,04 \cdot 0,95abc = 0.95836abc$, um resultado ligeiramente diferente. Consequentemente, os números anotados por Dimas não podem corresponder aos números no quadro.

4. Inspirados pelo critério de divisibilidade por 9, podemos descobrir o seguinte fato:

Lema. Considere a representação decimal de um número $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$, onde cada a_i representa um dígito. Seja $m = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ a soma de seus dígitos. Então, o resto encontrado quando dividimos n por 9 é igual ao resto encontrado quando dividimos m por 9.

Demonstração. Note que

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Por outro lado, $10 \equiv 1 \pmod 9$, e portanto $10^l \equiv 1 \pmod 9$ para todo l natural. Consequentemente,

$$\begin{aligned} n &\equiv a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \equiv \\ &\equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv m \pmod 9, \end{aligned}$$

logo os restos de n e m quando dividimos por 9 são iguais. ■

Voltando ao problema, cada operação que fazemos em números de dois algarismos ou mais diminui estes números escritos no quadro. Porém, números de um algarismo permanecem iguais.

Mais ainda, o lema acima nos indica que o resto de cada um dos números quando divididos por 9 permanece inalterado a cada passo. Ou seja, ao fim, o número que esta na posição i é o resto da divisão de i por 9. Mas 1.000.000 é igual a $9 \times 111.111 + 1$, o que indica que o resto 1 aparece uma vez a mais que qualquer outro na lista final.

5. Uma boa ideia para se resolver este problema seria realizar alguns passos iniciais e buscar propriedades invariantes sobre as quantidades de camaleões de cada cor. Não é difícil perceber que sempre haverá uma quantidade que deixa resto 0 quando dividida por 3, outra que deixa resto 1 e outra que deixa resto 2. Demonstremos tal fato.

Inicialmente temos 13, 15 e 17, que deixam resto 1, 0 e 2 respectivamente. Suponha que após certa quantia de passos, as quantidades de camaleões de cada cor de fato deixem restos distintos quando divididos por 3. Para ficar mais preciso, suponha que elas sejam $a \equiv 0 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$, e $c \equiv 2 \pmod 3$. Temos 3 casos a analisar; escrevemos o que acontece com os restos módulo 3 abaixo:

- Se $(a, b, c) \to (a + 2, b - 1, c - 1)$, então os restos $(0, 1, 2) \to (2, 0, 1)$;
- Se $(a, b, c) \to (a - 1, b + 2, c - 1)$, então os restos $(0, 1, 2) \to (2, 0, 1)$;
- Se $(a, b, c) \to (a - 1, b - 1, c + 2)$, então os restos $(0, 1, 2) \to (2, 0, 1)$;

De fato, todos eles resultam na mesma configuração $\bmod 3$, porque $x + 2 \equiv x - 1 \pmod 3$ para todo x natural. O importante é que podemos provar então por indução que os restos de fato tem a propriedade enunciada acima. Concluímos que não podemos obter todos os camaleões tenham a mesma cor, pois neste caso os restos seriam todos 0.

6. Neste problema precisamos utilizar o seguinte fato, que não será demonstrado (exercício!).

Fato. Sejam a e b dois números inteiros positivos. Então $mdc(a, b) \cdot mmc(a, b) = ab$.

Este fato nos indica que, a cada passo, o produto dos números na lista não muda. Este produto sempre será igual a 2014! portanto. Podemos utilizar a desigualdade das médias para concluir que a soma dos 2014 números no quadro satisfaz

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2014} \geq 2014 \cdot \sqrt[2014]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$$

7. Suponha que seja possível. Seja m a quantidade de passos realizados até chegar em tal situação. Note que após m passos, a quantidade de pilhas é igual a $m + 1$. Por outro lado, m discos teriam sido removidos do total de pilhas. Como cada pilha tem três discos, isto implica que:

$$3(m + 1) + m = 1000 \iff 4m = 1997,$$

o que é impossível, pois m é inteiro.

8. Lembre que a área de um triângulo pode ser calculada como o produto do comprimento de sua base pelo comprimento de sua altura. Considerando como base o lado definido pelo vértice refletido e o vértice que é o centro da reflexão, notamos que no novo triângulo a altura é exatamente a mesma e a base tem exatamente o mesmo comprimento. Logo, a área do triângulo é sempre preservada.

Para concluir, basta utilizar o seguinte fato:

Fato. Dentre os triângulos de mesma área, o de menor perímetro é o equilátero.

Isto pode ser demonstrado utilizando-se a forma de Heron para a área. Se a, b e c são os comprimentos dos lados e $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Como $(p-a)+(p-b)+(p-c) = p$, segue da desigualdade das médias que

$$p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27},$$

com igualdade apenas quando $p-a = p-b = p-c$, o que equivale a $a = b = c$. Logo, conhecida a área de um triângulo, vale que $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$, com igualdade apenas quando $a = b = c$. Como a área dos triângulos é sempre a mesma, concluímos que o perímetro será mínimo exatamente quando o triângulo é equilátero.

9. Construímos um grafo onde cada vértice é a casa de um anão, e cada par de vértices está ligado por uma aresta se, e somente se, os anões que moram nas casas correspondentes são amigos. Pintamos também cada vértice do grafo com a cor da casa correspondente. A cada mês, mudamos a cor dos vértices de acordo com o que faz o anão com sua casa: se o vértice tiver a maioria de seus vizinhos pintados de uma cor diferente da sua própria, ele muda para essa cor.

Dizemos que uma aresta neste grafo é boa se os dois vértices em suas pontas estão pintados da mesma cor. Note que a cada mês, se alguma anão muda a cor da sua casa, o número de arestas boas aumenta. De fato, as arestas que não tem o vértice correspondente à sua casa dentre suas pontas não mudam de estado, ou continuam sendo boas ou continuam não sendo boas. Analisemos o que ocorre com as arestas que tem como vértice esta casa do anão, que foi pintada com a outra cor.

Se a cor da casa anteriormente era a cor 1, então haviam a amigos cuja casa era pintada da cor 2 e b amigos cuja casa era pintada da cor 1, com $a > b$. Ou seja, o número de arestas boas com esta casa como vértice era b. Logo após o anão pintar sua casa com a cor 2, as casas de seus amigos permanecem pintadas da mesma cor, e portanto o número de arestas boas com esta casa como vértice é agora a, ou seja, a quantia aumentou, como queríamos provar.

Contudo, o número de arestas no grafo é fixo, e portanto o número de arestas boas não pode aumentar indefinidamente, indicando que o processo terá que parar após algum tempo.

10. A grande dificuldade deste problema é decidir qual semi-invariante tomar. Poderíamos ser tentados a considerar a soma dos números no quadro, mas $a + b - \frac{a+b}{4}$ é uma quantia difícil de ser controlada a longo prazo, de forma a sermos capazes de estimar a soma final dos números no quadro.

Neste tipo de situação temos que buscar expressões que se parecem ou que podem estar relacionadas com a operação que é feita com os números. Com um pouco de criatividade, lembramos que $a+b$ também aparece na média harmônica e somos inspirados a considerar como semi-invariante a soma dos inversos de todos os números escritos no quadro.

Nesta linha, a soma dos inversos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab},$$

é uma expressão um pouco parecida com a mudança que fazemos. Entretanto para calcular a variação deste semi-invariante temos que considerar o inverso de $\frac{a+b}{4}$. Sendo assim, estimamos:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\frac{a+b}{4}} = \frac{a+b}{ab} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{(a+b)ab}.$$

Note agora que, como os números originais são todos positivos, não é difícil provar por indução que todos os números no quadro serão sempre positivos. Por outro lado, é sabido que

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0,$$

indicando que a diferença acima é não negativa. Logo, a soma dos inversos dos números no quadro nunca cresce. No momento inicial ela é igual a n, e portanto no momento final será menor ou igual a n. Se o número final for x, temos então $\frac{1}{x} \leq n \implies x \geq \frac{1}{n}$, o que conclui a prova.

11. Dada qualquer expressão do tipo, enumere as posições letras, sendo que o 1 corresponde à posição da primeira letra. O invariante agora é a paridade do número de letras a em posições ímpares.

Consideremos a primeira operação. Note que todas as letras a à esquerda do bloco aba não mudam de posição após ele se tornar b. Já as letras a à direita do bloco tem suas posições decrescidas de 2. As duas letras a removidas do bloco estavam em posição de mesma paridade, portanto o invariante de fato não é alterado. Por uma análise análoga, a inversa desta operação também não muda o invariante.

Analisemos agora a segunda operação. As letras a à esquerda do bloco bba não mudam de posição após ele se tornam a. Já as letras a à direita do bloco bb tem usa posições decrescidas de 2. Por uma análise análoga, a inversa desta operação também não muda o invariante.

Para concluir, observe que na configuração inicial temos 1001 letras a em posições ímpares mas a configuração pedida tem 1002 letras em posições ímpares.

12. Não é bem um exercício sobre uma quantidade invariante após certa modificação, mas diz respeito a certas quantidades que devem ser respeitadas por qualquer distribuição dos números em uma lista de 3972 números. Enumere as posições na lista de 1 a 3972. Nosso "invariante" é a quantidade de números colocados em posições pares subtraído da quantidade de números colocados em posições ímpares. Como 3972 é par, esta diferença tem que ser sempre 0.

Suponha que seja possível construir a lista com as propriedades pedidas pelo enunciado. Se k é par, como temos k números entre as duas aparições de k na lista, estas acontecem em posições de paridades distintas, e portanto a contribuição total para o invariante é 0. Por outro lado, se k é ímpar, novamente porque temos k números entre as duas aparições de k, estas acontecem em posições de paridades iguais, e portanto cada uma delas contribui com $+2$ ou -2. Note porém que $1986 = 2 \times 993$, donde segue que a soma de 993 parcelas $+2$ ou -2 nunca se anula, e tal configuração é impossível. Isto pode ser observado analisando a soma $\bmod 4$; como $-2 \equiv 2 \pmod 4$, a soma das parcelas seria $993 \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2 \pmod 4$ e logo não é 0.

13. Este tipo de questão pode ser pensada da seguinte maneira. Considere os gafanhotos numerados de 1 a n. Partindo da lista inicial $1, 2, \ldots, n$, podemos, a cada passo, mudar dois números de posição. O problema se resume a mostrar que não é possível retornar à lista inicial após um número ímpar de passos.

O invariante clássico a ser utilizado nesse tipo de problema é o número de inversões na lista de gafanhotos. Chamamos de inversão cada par de inteiros (a, b) na lista tais que $a > b$ e a aparece antes de b. Note que inicialmente há 0 inversões. A cada passo, ao trocarmos dois números x e y vizinhos na lista de posição, analisemos o que ocorre.

Todas as inversões (a, b) que não envolvem ao mesmo tempo x e y são preservadas, pois as posições relativas de a e b na lista não mudam. Já as posições relativas de x e y mudaram. Se antes elas representavam uma inversão, agora não representam mais, e vice-versa. Isto significa que o número de inversões a cada passo muda em $+1$ ou -1. Dessa maneira, como $1 \equiv -1 \pmod 2$, após uma quantidade ímpar de passos, o número de inversões será ímpar e portanto a configuração final não pode ser igual à configuração inicial. Observe também que após uma quantidade par de passos, o número de inversões será sempre par.

14. A cada operação, a quantidade de números na lousa cai de um. Logo são necessárias 9 operações. Para responder a letra b), precisamos considerar um invariante mais complicado. Uma maneira de encontrá-lo é brincar com a operação de troca. Seja S a soma dos números no quadro em certo instante. Sendo a e b dois números na lousa, temos

$$S - a = S(a,b) + b \qquad \text{e} \qquad S - b = S(a,b) + a.$$

Além disso,

$$b \cdot (S(a,b) + a) = b \cdot S(a,b) + ab \qquad \text{e} \qquad a \cdot (S(a,b) + b) = a \cdot S(a,b) + ab,$$

e a soma destas expressões parece-se muito com a troca realizada. Somos inspirados portanto a considerar o seguinte invariante.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os números no quadro e S a soma deles. Tome

$$I = x_1(S - x_1) + x_2(S - x_2) + \cdots + x_n(S - x_n).$$

Provemos que esta quantidade permanece inalterada após uma operação.

Suponha sem perda de generalidade que a operação será feita utilizando-se x_1 e x_2, os demais números permanecendo inalterados. Se a soma anterior era $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, a nova soma será

$$S' = x_1 + x_2 + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)} + x_3 + \cdots + x_n = S + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)}.$$

O novo valor de I é

$$\begin{aligned}
I' &= \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)}\right) \cdot \left[S' - \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)}\right)\right] + x_3(S' - x_3) + \cdots + x_n(S' - x_n) \\
&= \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)}\right) \cdot \left[S + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)} - \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)}\right)\right] + \\
&\qquad + x_3\left(S + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)} - x_3\right) + \cdots + x_n\left(S + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)} - x_n\right) \\
&= \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)}\right) \cdot S(x_1,x_2) + x_3(S - x_3) + \cdots + x_n(S - x_n) + (x_3 + \cdots + x_n) \cdot \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)} \\
&= (x_1 + x_2)S(x_1,x_2) + x_1x_2 + x_3(S - x_3) + \cdots + x_n(S - x_n) + S(x_1,x_2) \cdot \frac{x_1x_2}{S(x_1,x_2)} \\
&= (x_1 + x_2)S(x_1,x_2) + 2x_1x_2 + x_3(S - x_3) + \cdots + x_n(S - x_n) \\
&= x_1(S - x_1) + x_2(S - x_2) + x_3(S - x_3) + \cdots + x_n(S - x_n) = I,
\end{aligned}$$

onde a passagem da penúltima para a última linha pode ser verificada através dos cálculos realizados para a e b no início de nossa solução. Concluímos que I é mesmo invariante!

Inicialmente temos $S = 55$, e portanto

$$\begin{aligned}
I = x_1(S - x_1) + \cdots + x_{10}(S - x_{10}) &= (x_1 + \cdots x_{10}) \cdot S - (x_1^2 + \cdots x_{10}^2) \\
&= S^2 - (x_1^2 + \cdots x_{10}^2) = 55^2 - (1^2 + \cdots + 10^2) = 2640.
\end{aligned}$$

Quando temos apenas dois números x e y, o invariante I é igual a $xy + yx = 2xy$, donde segue que $2xy = 2640$. Contudo, podemos fazer todas as 9 operações sem nunca utilizar o número 1, e neste caso teríamos $y = 1$. Observando que os números escritos na lousa são sempre todos maiores ou iguais a 1, chegamos à conclusão que o valor máximo para x é alcançado exatamente nesta situação e ele será $2640/2 = 1320$.

15. A solução deste problema é esperta. Note que após qualquer quantidade de trocas, cada criança tem n doces. Mostraremos que, enquanto as crianças não tiverem um doce de cada tipo, sempre será possível realizar uma troca com uma propriedade adicional simples, e, além disso, a escolha em si dessas trocas especiais não importa: realizando-as de qualquer maneira, inevitavelmente, depois de certo tempo, cada uma das crianças terá um doce de cada tipo.

Vamos à primeira afirmação. Se o problema ainda não foi resolvido, seja i o tipo de doce possuído pelo menor número de crianças. Em caso de empate, escolha qualquer um destes tipos. Pelo princípio da casa dos pombos, existe então uma criança C com este tipo de doce em múltiplos exemplares, **pelo menos** 2, e portanto C não possui qualquer doce de algum outro tipo j. Considere agora as crianças $C_1, C_2, \ldots, C_m$ que não possuem nenhum exemplar do doce tipo i. Alguma delas tem que possuir um doce do tipo j, caso contrário este tipo de doce não seria possuído por C nem por $C_1, C_2, \ldots, C_m$, e o número de crianças que tem algum exemplar de doce deste tipo j é menor que o número de crianças que tem algum exemplar do doce tipo i, o que contraria a minimalidade do tipo i. Consequentemente, alguma das crianças $C_1, C_2, \ldots, C_m$ pode trocar seu doce do tipo j por um doce do tipo i com C, e a afirmação está correta.

Atenção! Cada uma das trocas que iremos realizar envolve uma criança α que possui **pelo menos** 2 exemplares de doce do tipo i e uma criança β que possui algum exemplar de doce do tipo j.

Para concluir que em algum momento tem que ser impossível realizar mais trocas, e portanto todas as crianças tem um doce de cada tipo, consideraremos um invariante. Seja $q(\gamma, l)$ a quantidade de doces que a criança γ tem do tipo l. Como queremos que estas quantidades se tornem todas iguais a 1, faz sentido considerar o semi-invariante

$$I = \sum_{\substack{1\le\gamma\le n \\ 1\le l\le n}} q(\gamma, l)^2.$$

Analisemos o que ocorre com este número após uma troca de doces. Se a criança α troca um doce do tipo i por um doce do tipo j com a criança β, então quatro valores no somatório acima mudam:

$$q'(\alpha, i) = q(\alpha, i) - 1; \quad q'(\alpha, j) = q(\alpha, j) + 1; \quad q'(\beta, i) = q(\beta, i) + 1; \quad q'(\beta, j) = q(\beta, j) - 1.$$

Note porém que $q(\alpha, j) = 0 = q(\beta, i)$, porque esta condição é necessária para realizarmos a troca. Assim, o novo valor de I satisfaz:

$$\begin{aligned} I' &= I + [q'(\alpha, i)]^2 - [q(\alpha, i)]^2 + [q'(\alpha, j)]^2 - [q(\alpha, j)]^2 + [q'(\beta, i)]^2 - [q(\beta, i)]^2 + [q'(\beta, j)]^2 - [q(\beta, j)]^2 \\ &= (-2 \cdot q(\alpha, i) + 1) + 1 + 1 + (-2 \cdot q(\beta, j) + 1) = 4 - 2 \cdot [q(\alpha, i) + q(\beta, j)]. \end{aligned}$$

Mas de acordo com a propriedade adicional de nossas trocas, a soma $[q(\alpha, i) + q(\beta, j)]$ é pelo menos 3, pois uma das crianças tinha ao menos 2 exemplares do doce do tipo a ser trocado. Isto significa que

$$I' \le I - 2,$$

e portanto a quantia I é estritamente decrescente. Como ele é sempre positiva, em algum momento terá que parar de cair, significando que não é mais possível realizar trocas e que cada uma das crianças tem um doce de cada tipo.

16. Seja $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a raiz positiva de $x^2 - x - 1 = 0$. Segue que

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{1}$$

Se uma pedra está no copo i, diremos que sua energia é ϕ^{-i}. Seja E a soma total das energias de todas as pedras nos copos. Ao realizar um movimento A trocamos duas pedras cuja soma das energias era $\phi^{-i-1} + \phi^{-i}$ por uma cuja energia é ϕ^{-i+1}. Multiplicando a equação (1) por ϕ^{-i-1} notamos que a energia total foi preservada. De maneira análoga, notamos que

$$\phi^{-i-2} + \phi^{-i+1} = \phi^{-i-2} + \phi^{-i-1} + \phi^{-i} = \phi^{-i} + \phi^{-i},$$

e, por isso, E também é preservada após realizarmos um movimento do tipo B. Como temos n pedras no copo 0 inicialmente, teremos $E = n$ em todas as configurações que podemos obter no nosso problema. Por consequência, existe existe um valor m_1 $(= -\lfloor \log_\phi n \rfloor - 1)$ tal que todo copo à esquerda de m_1 jamais será ocupado por uma pedra, pois, se isto ocorresse, o valor de E seria maior que n.

Seja então k_1 o menor inteiro tal que o copo k_1 chegou a abrigar alguma pedra em alguma realização deste jogo. Temos $k_1 \geq m_1$. Note então que a pedra que ocupou o copo k_1 em algum momento jamais será movida novamente, porque qualquer movimento que fizéssemos levaria-la ou outra pedra para um copo mais à esquerda de k_1, contradizendo a sua minimalidade.

Daí em diante podemos então ignorar esta pedra e considerá-la fora do jogo. Repetimos então o mesmo argumento partindo da configuração que paramos e agora trabalhando com $n-1$ pedras, cuja somas das energias será $n - \phi^{-k_1}$. Novamente, é impossível que alguma pedra ocupe uma casa à esquerda de $m_2 = -\lfloor \log_\phi n - \phi^{-k_1} \rfloor - 1 \geq m_1$ e portanto podemos encontrar uma outra pedra que atingirá uma posição máxima k_2 à esquerda e não mais se moverá. Repetimos este procedimento várias vezes até que todas as pedras não possam mais se mover.

Em uma configuração final, não podem haver duas pedras em um mesmo copo nem duas pedras em copos vizinhos, do contrário, poderíamos realizar ao menso mais um movimento. Logo, para provar a unicidade da configuração final, basta mostrar que todo número inteiro positivo n pode ser escrito de forma única como

$$n = \sum_{i=0}^{k} \phi^{c_i},$$

onde cada c_i é um inteiro, e $c_i + 1 < c_{i+1}$ para todo inteiro $i = 0, \ldots, k-1$. Suponha que existam duas escolhas possíveis para os valores de c_i como acima, de maneira que ambas as somas resultem em n,

$$n = \sum_{i=0}^{k} \phi^{c_i} = \sum_{j=0}^{l} \phi^{\tilde{c}_j}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $\tilde{c}_l$ é maior que c_k. De fato, caso sejam iguais, podemos cortar os termos ϕ^{c_k} e $\phi^{\tilde{c}_l}$ da igualdade acima, reduzindo o número de termos, e analisar repetidamente as novas igualdades que obtemos até concluir que todos são iguais ou encontrar igualdade na qual o máximo da sequência dos c_i's seja diferente do máximo da sequência dos $\tilde{c}_j$'s. Podemos então observar que

$$\sum_{i=0}^{k} \phi^{c_k - 2i} \geq \sum_{i=0}^{k} \phi^{c_i},$$

mas a soma da P.G. em questão é

$$\frac{\phi^{c_k+2} - \phi^{c_k-2k}}{\phi^2 - 1} = \frac{\phi^{c_k+2} - \phi^{c_k-2k}}{\phi} = \phi^{c_k+1} - \phi^{c_k-2k-1} < \phi^{\tilde{c}_l},$$

o que contradiz a igualdade acima. ■