Problemas Resolvidos

Nível 2

Congruência de triângulos

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problema 1. $ABCD$ é uma paralelogramo e ABF e ADE são triângulos equiláteros construídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que FCE também é equilátero.

Problema 2. (Rússia 1946) Dados três pontos A, B, C sobre uma reta l, são construídos triângulos equiláteros ABC_1 e BCA_1 em um mesmo semi-plano com respeito a l. Se M e N são os pontos médios de AA_1 e CC_1, respectivamente, mostre que o triângulo BMN é equilátero.

Problema 3. (Inglaterra 1995) Seja ABC um triângulo retângulo em C. As bissetrizes internas de BAC e ABC encontram BC e CA em P e Q, respectivamente. Sejam M e N os pés das perpendiculares a partir de P e Q até AB, respectivamente. Encontre a medida do ângulo MCN.

Problema 4. (Polônia 1992) Os segmentos AC e BD intersectam-se no ponto P de modo que $PA = PD$, $PB = PC$. Seja O o circuncentro do triângulo PAB. Prove que as retas OP e CD são perpendiculares.

Problema 5. Em um quadrado $ABCD$, M é o ponto médio de AB. Uma reta perpendicular a MC em M toca AD em K. Prove que $\angle BCM = \angle KCM$.

Problema 6. Dado um triângulo qualquer ABC, D, E e F são pontos médios dos lados AC, AB e BC, respectivamente. Sendo BG uma altura do triângulo ABC, prove que $\angle EGF = \angle EDF$.

Problema 7. No losango $ABCD$ com $BAD = 60°$, tomamos pontos F, H e G nos lados AD, DC e na diagonal AC, respectivamente, de modo que $DFGH$ seja um paralelogramo. Prove que o triângulo BFH é equilátero.

Problema 8. Dado um quadrado $ABCD$ e E um ponto no interior dele tal que $\angle EDC = \angle ECD = 15°$, prove que $\triangle ABE$ é equilátero.

Problema 9. Sejam ABC um triângulo, D um ponto sobre o prolongamento da semi-reta BC a partir de B tal que $BD = BA$ e M o ponto médio de AC. A bissetriz do ângulo $\angle ABC$ corta DM em P. Mostre que $\angle BAP = \angle ACB$.

Problema 10. Prove que se em um triângulo ABC, a mediana AM é tal que $\angle BAC$ é dividido na razão $1:2$, e D está sobre AM, com M entre A e D, tal que $\angle DBA = 90°$, então $AC = \frac{AD}{2}$. **Dica:** Escolha P sobre AD tal que $AM = MP$.

Soluções

1. Denotemos por α e β os ângulos $\alpha = \angle BAD = \angle BCD$ e $\beta = \angle ABC = \angle ADC$. Note que $\alpha + \beta = 180°$.

Como $ABCD$ é um paralelogramo e os triângulos ABF e ADE são equiláteros, temos que $ED = AD = BC$ e $FB = AB = DC$, e além disso $\angle CBF = \angle CDE = 360° - 60° - \beta$. Concluímos que, pelo critério l.a.l., os triângulos $\triangle CBF$ e $\triangle CDE$ são congruentes. Consequentemente, $CE = CF$.

Por outro lado $\angle ECF = \alpha + \angle DCE + \angle BCF$. Como $\triangle CBF \equiv \triangle CDE$, temos que $\angle DEC = \angle BCF$, logo $\angle DCE + \angle BCF = \angle DCE + \angle DEC = 180° - \angle CDE = 180° - (360° - 60° - \beta) = \beta - 120°$. Isso mostra que $\angle ECF = \alpha + \beta - 120° = 180° - 120° = 60°$.

Mostramos então que o triângulo FCE é isósceles (com $CE = CF$) e $\angle ECF = 60°$. Os outros dois ângulos do triângulo terão que ser iguais entre si e somar $120°$, logo cada um deles será igual a $60°$, donde concluímos que $\triangle FCE$ é equilátero.

2. Começaremos observando que $\triangle BAA_1 \equiv \triangle BCC_1$, pois $BA = BC_1$, $BA_1 = BC$ e $\angle ABA_1 = \angle CBC_1 = 120°$. Consequentemente teremos que $BM = BN$ por serem as medianas correspondentes aos lados AA_1 e CC_1 dos respectivos triângulos congruentes $\triangle BAA_1$ e $\triangle BCC_1$.

Basta mostrar que $\angle MBN = 60°$. Para isso, usaremos novamente que $\triangle BAA_1 \equiv \triangle BCC_1$ e que BM e BN são medianas de esses triângulos, então teremos que $\triangle BMA_1 \equiv \triangle BNC$ e, portanto, $\angle MBA_1 = \angle NBC$. Finalmente, $\angle MBN = \angle CBA_1 - \angle NBC + \angle MBA_1 = \angle CBA_1 = 60°$.

3. Denotemos por α e β os ângulos $\alpha = \angle CAP = \angle PAB$ e $\beta = \angle ABQ = \angle QBC$. Olhando para os ângulos internos do $\triangle ABC$ temos que $90° + 2\alpha + 2\beta = 180°$, donde concluímos que $\alpha + \beta = 45°$.

Olhando os ângulos internos do $\triangle ACP$, vemos que $\angle APC = 90° - \alpha$. Como AP é bissetriz de $\angle CAB$ e $\angle ACP = \angle AMP = 90°$, temos que $CP = PM$ e as retas AP e CM se intersectam perpendicularmente. Com isso, temos que $\angle PCM = 90° - \angle APC = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.

De maneira análoga, usando a bissetriz BQ, podemos mostrar que $\angle QCN = \beta$.

Assim, $\angle MCN = 90° - \alpha - \beta = 90° - 45° = 45°$.

4. Chamemos de Q o ponto de intersecção de OP e CD. Devemos mostrar que $\angle DQO = 90°$.

Seja R o pé da perpendicular a partir de O até PB. Como O é o circuncentro de $\triangle PAB$ temos que OR também é bissetriz de $\angle POB$. Veja que $\angle POB$ é o ângulo central correspondente ao arco PAB da circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle PAB$, então temos que $\frac{\angle POB}{2} = \angle PAB$, ou seja, $\angle POR = \angle PAB$.

Como $PA = PD$ e $PB = PC$, temos que $\triangle CPD \equiv \triangle BPA$, e, portanto, $\angle PDC = \angle PAB$. Também, $\angle QDR = \angle PDC$, por serem opostos pelo vértice. Logo teremos $\angle QOR = \angle QDR$.

Isto último mostra que o quadrilátero $DQOR$ é inscritível, o que consequentemente implica $\angle DQO = \angle DRO = 90°$.

5. Seja L o ponto de interseção das retas CB e KM. Veja que $\triangle AKM \equiv \triangle MBL$ pelo critério a.l.a., pois $AM = MB$, $\angle AMK = \angle BML$, por serem opostos pelo vértice e $\angle KAM = \angle LBM = 90°$. Consequentemente teremos que $KM = ML$. Isto implica que a altura CM do $\triangle KCL$ também será mediana, donde concluímos que $\triangle KCL$ será isósceles e, portanto, CM será bissetriz de $\angle KCL$, o que conclui a prova.

6. EG é a mediana do triângulo retângulo ABG, logo ela será igual à metade da hipotenusa, ou seja, $AE = EB = EG$. Por outro lado, veja que DF é a base média do $\triangle ABC$ correspondente ao lado AB, logo $DF = \frac{AB}{2}$. Em particular temos que $EG = DF$ o que implica que $EFDG$ é uma trapézio isósceles. Consequentemente $\angle FEG = \angle EFD$ e, pelo critério l.a.l., temos $\triangle EFG = \triangle EFD$, donde concluímos que $\angle EGF = \angle EDF$.

7. Chamemos de a o comprimento de cada lado do losango $ABCD$. Denotemos também x e y os seguintes comprimentos: $x = DH$ e $y = HC$. Note que $x + y = a$.

Como $ABCD$ é um losango, temos que AC é bissetriz de $\angle BCD$, logo $\angle ACD = 30°$. Também, como $GH \parallel FD$, temos $\angle CGH = \angle CAD = 30°$, donde concluímos que $\triangle CHG$ é isósceles com $GH = HC = y$. Teremos também $DF = GH = y$, e, como $x + y = a$, também vale $FA = x$

Considere em AB o ponto L tal que $\triangle AFL$ é equilátero, logo $FL = AL = FA = x$ e $\angle ALF = 60°$. Note que, pelo critério l.a.l. $\triangle DFH \equiv \triangle LBF$ e então $FH = FB$.

Para concluir basta mostrar que $\angle BFH = 60°$. Para isso, observe que $\angle GFH = \angle FHD$ (alternos internos) e que $\angle GFB = \angle FBL = \angle DFH$ (na primeira igualdade os ângulos são alternos internos e na segunda são ângulos dos triângulos congruentes $\triangle DFH$ e $\triangle LBF$). Temos então que $\angle BFH = \angle GFH + \angle GFB = \angle FHD + \angle DFH = 180° - \angle FDH = 180° - 120° = 60°$.

8. Seja F o pé da altura correspondente ao lado CD do triângulo isóscele $\triangle CDE$. Seja G o ponto de interseção de EF com o lado AB. Como $ABCD$ é um quadrado, F e G são pontos médios de CD e AB, respectivamente.

Considere o ponto P em EF tal que $\triangle CPD$ é equilátero. Teremos que $\triangle ADP$ é isósceles, pois $DP = DC = AD$, e também $\angle ADP = 90° - 60° = 30°$. Logo $\angle APD = \angle PAD = 75°$.

Veja agora que $\angle GAP = 90° - 75° = 15°$ e $AG = DF$, logo pelo critério a.l.a. temos que $\triangle APG \equiv \triangle DEF$. Consequentemente teremos que $AP = DE$ e $ADEP$ será um trapézio isósceles. As diagonais do trapézio devem então ser iguais, ou seja, $DP = AE$.

Como também $DP = AB$, acabamos de mostrar que $AE = AB$. Um argumento simétrico ao feito anteriormente mostra que $BE = AB$, e isto conclui a prova.

9. Chamemos de α os ângulos $\alpha = \angle BDA = \angle BAD$. Como $\angle ABC$ é ângulo externo do $\triangle ABD$ temos que $\angle ABC = 2\alpha$ e, como BP é bissetriz, temos que $\angle ABP = \angle PBC = \alpha$. Como consequência teremos que $BP \parallel AD$.

Considere N o ponto médio de AD. Note que $MN \parallel CD$. Sejam E e F os pontos de interseção da reta BP com as retas MN e AC, respectivamente, e seja G o ponto de interseção de AE com BC. Como E está na reta MN, temos que E é o ponto médio de AG, logo BE será mediana e bissetriz no $\triangle ABG$. Isso implica que $\triangle ABG$ é isósceles com $AB = BG$ e que $\angle AEB = 90°$.

No $\triangle AMD$ temos $PF \parallel AD$ e, como N é ponto médio de AD, também teremos que E é ponto médio de PF. Observamos então que as diagonais do quadrilátero $APGF$ se cortam no ponto médio e são perpendiculares. Isso mostra que $APGF$ é um losango, ou seja, todos os lados são iguais e os opostos são paralelos.

Em particular, mostramos que $PG \parallel AC$, donde temos $\angle ACB = \angle PGB$. Veja também que $\triangle ABP \equiv \triangle GBP$, pois BP é lado comum, $\angle ABP = \angle PBG$ e $AB = BG$ (usamos o critério l.a.l.). Consequentemente temos que $\angle BAP = \angle PGB$, o que conclui a prova.

10. Seguindo a dica dada no enunciado do exercício, consideramos em AD o ponto P tal que $AM = MP$. Observamos então que as diagonais do quadrilátero $ABPC$ se intersetam no ponto médio, o que implica que $ABCD$ é um paralelogramo. Chamemos $\alpha = \angle BAM$ e $2\alpha = \angle CAM$. Como $AB \parallel CP$ e

$AC \parallel BP$, também teremos que $\angle APC = \alpha$ e $\angle APB = 2\alpha$. Chamemos também de x o comprimento de AC, temos $x = AC = BP$. Queremos mostrar que $AD = 2x$.

Vamos escolher os pontos E e F sobre AP tal que $\angle ECP = \alpha$ e $AF = AC = x$. Veja então que $\triangle ECP$ é isósceles com $CE = EP$. O ângulo $\angle AEC$ é externo ao $\triangle ECP$, logo $\angle AEC = 2\alpha$. Vemos então que $\triangle ACE$ tem dois ângulos iguais a 2α, logo ele será isósceles com $AC = CE = x$.

Juntando as informações anteriores temos $AC = AF = CE = EP = BP = x$. Como M é ponto médio de AP e $AF = EP$, temos que M também é ponto médio de FE. Temos então que as diagonais do quadrilátero $CEBF$ se intersetam no ponto médio, e portanto $CEBF$ será um paralelogramo. Isso mostra que $FB = CE = x$ e $\triangle AFB$ é isósceles com $\angle BAF = \angle ABF = \alpha$.

No $\triangle PEB$, chamamos de β os ângulos $\beta = \angle PEB = \angle PBE$. Note que $\alpha + \beta = 90°$. Olhando para a soma dos ângulos internos do triângulo retângulo $\triangle ABD$, temos que $\angle ADB = \beta$.

Os triângulos $\triangle DFB$ e $\triangle EBP$ têm ambos um ângulo igual a 2α e outro igual a β, logo o terceiro ângulo de ambos triângulos será a β (lembre que $\alpha + \beta = 90°$). Como $FB = BP = x$, concluímos, pelo critério a.l.a., que $\triangle DFB \equiv \triangle EBP$. Como consequência, temos $FD = EP = x$, donde concluímos que $AD = AF + FD = x + x = 2x$, como queríamos mostrar.