Problemas Resolvidos

Nível 2

Desigualdades I

Material elaborado por Valentino Amadeus Sichinel

Problemas

1 Desigualdades Elementares

Problema 1. Sejam a, b e c números reais. Mostre que

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

Problema 2. Seja a um número real. Mostre que

$$a^4 - 4a^2 \geq -4.$$

Problema 3. Sejam a, b, c e d reais positivos. Suponha que $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$. Prove que

$$\frac{a+b}{b} \geq \frac{c+d}{d}.$$

Problema 4. Mostre que

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a,$$

quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 5. Seja a um número real. Mostre que

$$4a - a^4 \leq 3.$$

Problema 6. Determine se existe uma função injetiva $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 7. Encontre todos os pares (a, b) de números reais que satisfazem

$$(4a^2 + 4a + 3)(b^2 - 6b + 13) = 8.$$

2 Desigualdade das Médias

Problema 8. Sejam a e b reais positivos. Prove que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Quando a igualdade se verifica?

Problema 9. Sejam a e b reais positivos. Prove que

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Problema 10. Sejam a, b e c reais positivos. Mostre que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Problema 11. Prove que, dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro p, o quadrado é o que possui a maior área.

Problema 12. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos. Prove que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Problema 13 (OBM2001)**.** Prove que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

para quaisquer números reais positivos a, b e c.

Problema 14. Prove que, dentre todos os triângulos com o mesmo perímetro p, o triângulo equilátero é o que possui a maior área.

Problema 15. Sejam a e b reais positivos tais que $a + b = 1$. Prove que

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

Soluções

1. Abramos o lado esquerdo da desigualdade: temos

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca).$$

Então, mostrar que $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ é o mesmo que mostrar que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. Mas isso é um dos problemas que vimos em aula[1]!

2. Temos

$$a^4 - 4a^2 \geq -4 \iff a^4 - 4a^2 + 4 \geq 0 \iff (a^2-2)^2 \geq 0.$$

Como o quadrado de um número real é sempre maior que ou igual a zero, a última desigualdade é válida. Assim (as desigualdades são todas equivalentes), a primeira também é.

3. O objetivo deste problema era exercitar a manipulação de desigualdades, apenas. Como $\frac{b}{b} = 1 = \frac{d}{d}$,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{b} \geq \frac{c+d}{d} &\iff \frac{a+b}{b} - \frac{b}{b} \geq \frac{c+d}{d} - \frac{d}{d} \\ &\iff \frac{a+b-b}{b} \geq \frac{c+d-d}{d} \\ &\iff \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

4. É uma mera questão de enxergar os quadrados:

$$\begin{aligned} 2(a^2+b^2+1) - 2(ab+a+b) &= (a^2+b^2-2ab) + (a^2+1-2a) + (b^2+1-2b) \\ &= (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2. \end{aligned}$$

Sendo soma de quadrados, $2(a^2+b^2+1) - 2(ab+a+b)$ é maior que ou igual a zero. Assim, $2(a^2+b^2+1) \geq 2(ab+a+b)$, isto é, $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$.

5. Mais uma vez, o que precisamos fazer é encontrar os quadrados. Temos

$$4a - a^4 \leq 3 \iff a^4 - 4a + 3 \geq 0. \tag{1}$$

Se a^4 é parte de um quadrado, provavelmente esse quadrado envolve a^2. Uma parcela com a^2 pode ser parte também de um quadrado que envolve $(-4a)$. Após algumas tentativas, vemos que tudo de que precisamos é somar e subtrair $2a^2$. De fato,

$$\begin{aligned} a^4 - 4a + 3 \geq 0 &\iff a^4 - 2a^2 + 2a^2 - 4a + 3 \geq 0 \\ &\iff a^4 - 2a^2 + 1 + 2a^2 - 4a + 2 \geq 0 \\ &\iff (a^2-1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Uma soma de quadrados sempre é maior que ou igual a 0. Assim, a última desigualdade é válida e, como as desigualdades são todas equivalentes, a primeira desigualdade se verifica também. Por (1), o problema está resolvido.

[1] Você consegue demonstrá-lo?

6. A melhor maneira de começar a busca por uma função que satisfaz certas condições - ou a demonstração de que tal função não existe - é supor que já encontramos uma função assim e descobrir que propriedades essa função deve possuir. Suponhamos, então, que temos uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é injetiva e tal que $f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A princípio, não temos nenhuma informação sobre a relação entre $f(x)$ e $f(x^2)$ (a não ser a desigualdade acima): se x e x^2 são números distintos, o fato de um ser quadrado do outro não é suficiente para tirarmos conclusões sobre as suas imagens por f. Tudo que sabemos é que $f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}$... Se torna tentador, então, considerarmos os casos em que $x = x^2$.

A igualdade $x = x^2$ ocorre exatamente quando $x = 0$ ou $x = 1$. Consideremos o caso $x = 1$, por exemplo. Devemos ter $f(1) - f(1)^2 \geq \frac{1}{4}$. Por que não manipular essa desigualdade? Temos

$$\begin{aligned} f(1) - f(1)^2 \geq \frac{1}{4} &\iff 4f(1) - 4f(1)^2 \geq 1 \\ &\iff 0 \geq 4f(1)^2 - 4f(1) + 1 \\ &\iff 0 \geq (2f(1) - 1)^2. \end{aligned}$$

Ora, o quadrado de um número não pode ser menor que zero, e só é igual a zero se o próprio número é igual a zero. Assim, devemos ter

$$2f(1) - 1 = 0 \iff f(1) = \frac{1}{2}.$$

Se fizermos o mesmo processo com 0 ao invés de 1, vamos encontrar o mesmo resultado[2]: $f(0) = \frac{1}{2}$. Portanto, devemos ter

$$f(0) = \frac{1}{2} = f(1).$$

Mas isso é um absurdo, já que f deve ser injetiva! Dessa forma, não existe função satisfazendo as condições descritas no enunciado.

7. Observe que

$$4a^2 + 4a + 3 = (2a + 1)^2 + 2, \quad \text{e} \quad b^2 - 6b + 13 = (b - 3)^2 + 4.$$

Assim,

$$4x^2 + 4x + 3 \geq 2, \quad \text{e} \quad y^2 - 6y + 13 \geq 4.$$

Para que o produto das duas expressões seja exatamente 8, precisamos ter igualdade nas duas desigualdades. Assim, precisamos ter

$$2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad y - 3 = 0 \iff y = 3.$$

Logo, o único par de números reais que satisfaz a condição dada é $(-\frac{1}{2}, 3)$.

8. Pela desigualdade das médias,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

A desigualdade se verifica quando $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, isto é, quando $a^2 = b^2 \iff a = b$ (veja que, como os números são positivos, a igualdade entre os seus quadrados implica a igualdade entre eles).

[2]Que tal você tentar fazer essa parte? Vamos lá, é só seguir os passos que já fizemos, só que desta vez com $f(0)$ no lugar de $f(1)$!

9. Basta manipular:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$
$$\iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$
$$\iff 2(a^2+b^2) \geq a^2+b^2+2ab$$
$$\iff a^2+b^2 \geq 2ab.$$

Essa aí é exatamente a desigualdade das médias aplicada a a^2 e b^2.

10. Pela desigualdade das médias, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ e $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Multiplicando as desigualdades, obtemos $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

11. Se um retângulo de perímetro p possui lados de medidas a e b, então $2a+2b=p$, e a área do retângulo é igual a ab. Pela desigualdade das médias,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \text{isto é,} \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p/2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

ou seja, a área do retângulo é menor que ou igual a $\frac{p^2}{16}$. Também pelo teorema da desigualdade das médias, a igualdade pode ocorrer, e ocorre exatamente quando $a=b$. Portanto, dentre todos os retângulos de perímetro p, o quadrado (aquele em que os lados são iguais) é o de maior área - e esta área é exatamente igual a $\frac{p^2}{16}$.

12. Aplicando a desigualdade das médias a $a_1, a_2, \ldots, a_n$, vemos que

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \iff (a_1+a_2+\cdots+a_n) \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Fazendo o mesmo para $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, temos

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}} \iff \left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}.$$

Multiplicando essas duas desigualdades, obtemos o desejado.

13. O lado esquerdo da desigualdade pode ser reescrito como

$$(a+b)(a+c) = bc+a^2+ab+ac = bc+a(a+b+c).$$

Aplicando a desigualdade das médias a bc e $a(a+b+c)$, vemos que

$$bc+a(a+b+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

14. Consideremos um triângulo de perímetro p, e chamemos as medidas dos seus lados de a, b e c e a sua área de A. Pela definição do perímetro, $a+b+c=p$. Utilizaremos a *Fórmula de Heron para a área de um triângulo*:

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

Pela desigualdade das médias,

$$\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right) \leq \left(\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{p/2}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{6}\right)^3.$$

Assim,

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2} \cdot \frac{p^3}{6^3}} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

A igualdade ocorre quando temos igualdade na desigualdade das médias. Pelo teorema da desigualdade das médias, isso acontece exatamente quando $\frac{p}{2}-a=\frac{p}{2}-b=\frac{p}{2}-c$, ou seja, exatamente quando $a=b=c$.

Portanto, dentre todos os triângulos de perímetro p, o equilátero (aquele em que os lados são todos iguais) é o que possui a maior área - e esta área é igual a $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$.

15. Somamos $\frac{a+1}{9}+\frac{b+1}{9}=\frac{1}{3}$ para observar que

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{1}{3} = \left(\frac{a+1}{9}+\frac{a^2}{a+1}\right)+\left(\frac{b+1}{9}+\frac{b^2}{b+1}\right) \geq \frac{2a}{3}+\frac{2b}{3} = \frac{2}{3}.$$

Daí,

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

P.S.: A passagem

$$\left(\frac{a+1}{9}+\frac{a^2}{a+1}\right)+\left(\frac{b+1}{9}+\frac{b^2}{b+1}\right) \geq \frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}$$

é consequência de duas aplicações de MA-MG, uma em cada parêntesis.