Problemas Resolvidos

Nível 2

Indução

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo

Problemas

Problema 1. Prove que, para todo natural $n \geq 6$,

$$(n+3)^3 \leq 3^n.$$

Problema 2. Prove que, para todo n inteiro positivo,

$$(n+1) \cdot (n+2) \cdots (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1).$$

Problema 3. Prove que, para todo natural $n \geq 1$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Problema 4. (OBM 2006) Esmeralda posicionou todos os números naturais de 1 a 2006 no seguinte arranjo em forma de pirâmide:

				21				
			20	13	22			
		19	12	7	14	23		
	18	11	6	3	8	15	24	
17	10	5	2	1	4	9	16	25

Em qual andar se encontrará o número 2006? (Por exemplo: o número 1 está no primeiro andar, o 6 no segundo andar e o 23 no terceiro).

Problema 5. Seja $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de Fibonacci, definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 0$, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Mostre que se a e b são inteiros positivos, então

$$F_{a+b} = F_{a-1}F_b + F_aF_{b+1}.$$

Mostre que se $a \mid b$, então $F_a \mid F_b$.

Problema 6. O número de Euler é uma constante muito importante em estudos mais avançados de matemática. Uma das maneiras de defini-lo é a partir da identidade

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Este número é irracional e vale aproximadamente $2,71828182845904523536028 7$. Usando apenas indução podemos demonstrar que as aproximações $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ nunca passam de 3. Curiosamente, tentar aplicar indução diretamente é mais difícil que mostrar por indução outro resultado mais forte: mostre que, para todo $n \geq 1$,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 3 - \frac{2}{(n+1)!}.$$

Problema 7. (Torneio das Cidades 1986) Para cada subconjunto do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ calculamos o produto dos inversos dos seus elementos. Qual o valor, em função de N, da soma de todos os produtos deste tipo?

Problema 8. Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é igual a $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Problema 9. (OBM 2015) Prove que existe um número que pode ser representado de pelo menos 2015 maneiras diferentes como soma de quadrados de números naturais não nulos, não necessariamente todos distintos. Considera-se que duas somas que alteram apenas a ordem das parcelas constituem uma mesma representação.

Por exemplo, $12 + 12 + 32 + 32 + 72 + 102$ e $52 + 122$ são duas maneiras distintas de escrevermos 169 como soma de quadrados.

Problema 10. Seja $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ uma função satisfazendo $f(1,1) = 2$ e

$$\begin{aligned} f(m+1,n) &= f(m,n) + 2(m+n) \\ f(m,n+1) &= f(m,n) + 2(m+n-1). \end{aligned}$$

Prove que $f(m,n) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2$.

Problema 11. Seja $n \geq 2$ e G um grafo com $2n$ vértices e pelo menos $n^2 + 1$ arestas. Mostre que existe um triângulo neste grafo, ou seja, três vértices que são ligados dois a dois por arestas do grafo.

Problema 12. (OBM 2003) Há $N \geq 3$ cidades em Tumbólia. Cada duas cidades desse país são ligadas por uma rodovia ou uma ferrovia, não existindo nenhum par de cidades ligadas por ambos os meios.

Um turista deseja viajar por toda Tumbólia, visitando cada cidade exatamente uma vez, e retornar a cidade onde ele começou sua jornada.

Prove que é possível escolher a ordem na qual as cidades serão visitadas de modo que o turista mude o meio de transporte no máximo uma vez.

Problema 13. Existem n carros do mesmo modelo em diferentes pontos de um circuito de corrida. Juntando o conteúdo dos seus tanques, obtemos a quantidade de combustível necessária para que um carro complete uma volta no circuito. Prove que existe um carro que pode completar uma volta no circuito se ele "pegar" todo combustível dos outros carros ao passar por cada um deles no circuito.

Problema 14. (Pan-Africana 2002) Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ números reais tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Mostre que

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leq 1.$$

Problema 15. Mostre que 17 é um resíduo quadrático módulo 2^k para todo k inteiro positivo[1]. Em outras palavras, mostre que para todo k inteiro positivo existem n e b inteiros positivos tais que

$$b^2 = 2^k n + 17.$$

[1] ou seja, a equação $x^2 \equiv 17 \mod 2^k$ admite solução.

Problema 16. (Torneio das Cidades 2000) Cada quadradinho 1×1 de um tabuleiro $n \times n$ contém um número diferente. Inicialmente, o menor número em cada linha é marcado, e verifica-se que estes números marcados estão todos em colunas diferentes. Em seguida, o menor número em cada coluna é marcado, e verifica-se que estes números marcados estão todos em linhas diferentes. Prove que os conjuntos de números marcados em cada um dos procedimentos são idênticos.

Problema 17. (EUA 2003) Prove que, para todo inteiro positivo n, existe um número de n algarismos, todos eles ímpares, divisível por 5^n.

Problema 18. (Coreia 2013) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de inteiros positivos satisfazendo $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 1$. Defina, para cada n inteiro positivo,

$$b_n = \frac{1}{a_{2n+1}} \sum_{i=1}^{4n-2} a_i.$$

Mostre que b_n é inteiro para todo $n \geq 1$.

Problema 19. (México 2002) Se $m = 4k + 1$ com $k \in \mathbb{Z}$ dizemos que m é do tipo $4k - 1$; se for $m = 4k - 1$ com $k \in \mathbb{Z}$, dizemos que é do tipo $4k - 1$. Seja n um inteiro positivo. O número n^2 tem mais divisores positivos do tipo $4k + 1$ ou do tipo $4k - 1$?

Problema 20. (Irã 2011) Arco-íris é o nome de um passarinho que muda de cor. Ele pode escolher a cada dia uma dentre n cores, mas suas cores em dois dias consecutivos nunca são iguais. Além disso, não existem 4 dias em sua vida $i < j < k < l$ tais que ele tenha a mesma cor nos dias i e k e a mesma cor nos dias j e l, sendo esta cor diferente da cor que ele tinha nos dias i e k.

Qual é o maior número de dias que o pássaro Arco-íris pode viver em função de n?

Problema 21. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_0 = 1$ e $x_n = (\frac{n-2008}{n})x_{n-1}\, \forall n \geq 1$. Calcule

$$S = \sum_{i=0}^{2007} 2^i x_i.$$

Problema 22. Sejam $x_1, \ldots, x_m$ e $y_1, \ldots, y_n$ inteiros positivos tais que as somas $x_1 + \cdots + x_m$ e $y_1 + \cdots + y_n$ são iguais e, além disso, menores que mn. Prove que podemos cortar alguns termos da igualdade

$$x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + x_n$$

e ainda assim obter outra igualdade.

Problema 23. (EUA 1991) Mostre que, para qualquer inteiro fixado $m \geq 1$, a sequência

$$2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

é eventualmente constante módulo m. Ou seja, a partir de certo ponto, os números da sequência acima tem o mesmo resto quando divididos por m.

Problema 24. (Torneio das Cidades 83) A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e tal que $a_{a_k} = 3k$ para todo inteiro $k \geq 1$. Encontre a_{100}.

Soluções

1. Como esta lista é sobre indução, provaremos por indução.
Caso base: $n = 6 \implies (n+3)^6 = (6+3)^3 = 9^3 = 3^6 = 3^n$, ok!
Passo indutivo: Suponha válido para n, ou seja, $(n+3)^3 \le 3^n$. Note que, para todo $n \ge 3$,

$$\frac{(n+1+3)^3}{(n+3)^3} = \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^3 \le \left(1+\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{7}{6}\right)^3 = \frac{343}{216} < 3.$$

Dessa maneira, pela hipótese de indução,

$$(n+1+3)^3 = \frac{(n+1+3)^3}{(n+3)^3}(n+3)^3 < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1},$$

o que conclui a prova.

2. Caso base: Se $n = 1$, o lado esquerdo é igual a 2 e o direito $2^1 \cdot 1 = 2$, ok.
Passo indutivo: Suponha que vale para n, ou seja,

$$A_n = (n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1).$$

Para $n+1$, o lado esquerdo da igualdade que queremos provar é

$$(n+2)\cdot(n+3)\cdots(2n)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2) = A_n \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = A_n \cdot (2n+1)\cdot 2.$$

Mas usando a expressão acima, esta última expressão é igual a

$$2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1)\cdot(2n+1)\cdot 2 = 2^{n+1}\cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1)\cdot(2n+1),$$

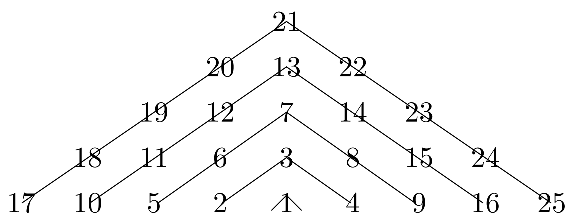
e isto conclui a prova.

3. Caso base: Quando $n = 1$, os dois lados da identidade são iguais a 1, pois $\frac{1\cdot 2}{2} = 1$.
Passo indutivo: Suponha válido para n. Segue que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) =$$
$$(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,$$

sendo assim a identidade também válida para $n+1$, o que conclui a prova.

4. Observamos inicialmente que o arranjo de Esmeralda segue as camadas $\wedge$ descritas abaixo



Afirmamos que a n-ésima camada tem $2n-1$ números e eles vão de $(n-1)^2+1$ até n^2. A prova é por indução.

Caso base: Para a 1ª camada é óbvio, só tem o 1. Para a segunda, os números são 2, 3, 4, e a afirmação é válida para $n=2$.

Passo indutivo: Suponha válido para a n-ésima camada. A próxima necessariamente começa com n^2+1. Além disso, ela tem exatamente dois números a mais que a anterior (você pode imaginar que no total adicionamos o número inicial e o final e levantamos a figura $\wedge$ um andar para cima). Assim, ela tem $2n-1+2=2(n+1)-1$ números e vai até $n^2+1+2n=(n+1)^2$.

O menor quadrado perfeito mais próximo de 2006 é $44^2=1936$. O número 2006 tem que estar então na 45ª camada. Além disso, ele é o 70º número nela, pois $2006-1937=69$. Isto significa que nesta camada ainda aparecem $2\cdot 45-1-70=19$ números após 2006. Dessa maneira, 2006 está no 20º andar.

5. Provaremos a igualdade para a, $b\geq 1$ por indução em a.

Caso base: Quando $a=1$, a igualdade fica $F_{b+1}=F_0F_b+F_1F_{b+1}=F_{b+1}$, ok.

Passo indutivo: $F_{a+1+b}=F_{a+b}+F_{a+b-1}=F_{(a)+b}+F_{(a-1)+b}$. Pela hipótese de indução,

$$F_{a+1+b}=F_{a-1}F_b+F_aF_{b+1}+F_{a-2}F_b+F_{a-1}F_{b+1}=F_b(F_{a-1}+F_{a-2})+F_{b+1}(F_a+F_{a-1})=F_aF_b+F_{a+1}F_{b+1},$$

o que conclui esta indução.

Agora consideraremos a fixo e $b=ka$. Provaremos por indução em k que $F_a\mid F_{ka}$ para todo $k\geq 1$.

Caso base: Se $k=1$, então $a=ka \implies F_a=F_{ka}$.

Passo indutivo: Seja $k\geq 2$. Pela fórmula que provamos acima,

$$F_{ka}=F_{(k-1)a+a}=F_{a-1}F_{(k-1)a}+F_aF_{(k-1)a+1},$$

e pela hipótese de indução, $F_a\mid F_{ka}$.

6. Caso base: $n=1\implies 1+\frac{1}{1!}=2=3-\frac{2}{(1+1)!}$, ok!

Passo indutivo: Pela hipótese de indução

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\leq 3-\frac{2}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=3-\frac{1}{(n+1)!}\leq 3-\frac{2}{(n+2)!},$$

pois $\frac{1}{(n+1)!}\geq\frac{2}{(n+2)!}\iff (n+2)\geq 2$, o que é sempre verdade para $n\geq 1$.

7. Seja A_n a soma desses produtos. Fazendo casos pequenos $N=1$, 2, 3 ,obtemos A_N igual a 1, 2, 3 respectivamente. Somos levados a conjecturar que o resultado é sempre igual a N. Provaremos por indução. O caso base $N=1$ já foi feito.

Passo indutivo: Suponha válido para N. Para $N+1$, dividimos os produtos em dois grupos, aqueles para os quais o fator $\frac{1}{N+1}$ aparece e aqueles em que não. Excluindo-se o produto constituído apenas de um fator $\frac{1}{N+1}$, todos aqueles do primeiro grupo são obtidos a partir de um do segundo adicionando-se o fator $\frac{1}{N+1}$ e cada um do segundo é obtido a partir de um do primeiro ignorando-se o fator $\frac{1}{N+1}$. Eles estão assim em bijeção. Além disso, a soma dos termos do segundo grupo é igual a A_N, pois correspondem aos produtos relativos ao conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Logo $A_{N+1}=\frac{1}{N+1}A_N+\frac{1}{N+1}+A_N$, que pela hipótese é igual a $\frac{1}{N+1}N+\frac{1}{N+1}+N=N+1$. ■

8. Caso base: Quando $n=3$ verificamos que um triângulo tem 0 diagonais, ok!

Passo indutivo: Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ os vértices consecutivos de um polígono convexo P com $n+1$ lados. Considere o polígono convexo P' definido pelos n vértices $A_1, A_3, \ldots, A_{n+1}$. Observe que toda diagonal de P' é diagonal de P. Pela hipótese, elas são $\frac{n(n-3)}{2}$. Além dessas, os segmentos $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2A_5}$, ..., $\overline{A_2A_n}$ também são diagonais de P. Assim, o número de diagonais de P é

$$\frac{n(n-3)}{2} + 1 + n - 2 = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \blacksquare$$

9. Afirmamos que, para cada n natural, existe um inteiro positivo m que pode ser escrito de, ao menos, n formas diferentes como soma de quadrados perfeitos.

Caso base: Para $n = 1$ tome m um quadrado perfeito.

Passo indutivo: Seja m que pode ser escrito de n maneiras diferentes como soma de quadrados perfeitos. Note que $4m$ pode ser escrito de n maneiras diferentes como soma de quadrados perfeitos sendo todos eles pares, basta multiplicar por 4 cada termo de cada uma das maneiras que conhecemos para m. Assim, o número $m' = 4m + 5^2$ também pode ser escrito de n maneiras distintas como soma de quadrado perfeitos, tendo apenas o 5^2 como fator ímpar. Podemos tomar uma destas maneiras e construir uma nova trocando 5^2 por $3^2 + 4^2$ e ela será distinta das n outras porque nenhuma delas continha o fator 3^2. Isto conclui a prova.

10. Faremos indução dupla. Começamos mostrando que $f(m, 1) = (m + 1)^2 - (m + 1)$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$.

Caso base: Quando $m = 1$, $f(1, 1) = 2 = (1 + 1)^2 - (1 + 1)$.

Passo indutivo: Suponha válido para m. Segue que

$$\begin{aligned} f(m+1,1) = f(m,1) + 2(m+1) =& (m+1)^2 - (m+1) + 2(m+1) = \\ & (m+1)^2 + 2(m+1) + 1 - (m+2) = (m+2)^2 - (m+2). \end{aligned}$$

Provado este fato, mostremos por indução em n que, para todo $m \in \mathbb{N}^*$ e todo $n \in \mathbb{N}^*$, $f(m, n) = (m + n)^2 - (m + n) - 2n + 2$.

Caso base: Quando $n = 1$, $2n = 2$ e caímos exatamente na afirmação que acabamos de provar.

Passo indutivo: Suponha válido para algum n e todo $m \in \mathbb{N}^*$. Segue que, para todo $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & f(m, n+1) = f(m, n) + 2(m+n-1) = (m+n)^2 - (m+n) - 2n + 2 + 2(m+n-1) = \\ & (m+n)^2 + 2(m+n) + 1 - 1 - (m+n) - 2n + 2 - 2 = (m+n+1)^2 - (m+n+1) - 2(n+1) + 2. \ \blacksquare \end{aligned}$$

11. Este é um bom exemplo no qual a indução é melhor descrita por uma redução ao caso anterior. Em geral, é conveniente enxergar a indução como um procedimento deste tipo.

Caso base: Se $n = 2$, o grafo tem 4 vértices. Como ele tem 5 arestas, pelo princípio das casas dos pombos, existe algum vértice v com grau 3, conectando-se a todos os outros vértices. Existe um par destes outros vértices ligado por alguma aresta, já que $5 > 3$. Juntando este par a v formamos um triângulo.

Passo indutivo: Considere um grafo com $2n+2$ vértices, $(n+1)^2+1$ arestas, e um par de vértices, (v_1, v_2), ligados por uma aresta. Seja E o conjunto dos $2n$ vértices restantes. Caso o número de arestas ligando v_1 e v_2 a E seja maior que $2n$, existe algum vértice de E ligado ao mesmo tempo a v_1 e a v_2, completando um triângulo. Caso contrário, podemos retirar v_1 e v_2 do grafo, removendo todas as arestas que estão conectadas a eles, num total de no máximo $2n + 1$ arestas, obtendo um grafo com $2n$ vértices e ao menos $(n + 1)^2 + 1 - 2n - 1 = n^2 + 1$ arestas. Pela hipótese de indução, há um triângulo neste grafo, logo também há um no original. $\blacksquare$

12. Caso base: Quando $N = 3$, as cidades de Tumbólia formam um triângulo, com três estradas, ferrovias ou rodovias. Ou são todas do mesmo tipo, ou duas de um tipo e uma do outro. No primeiro caso não é necessário mudar de transporte. No segundo, começando o caminho percorrendo o tipo de estrada que só aparece uma vez, o turista muda de transporte só uma vez.

Passo indutivo: Suponha que Tumbólia tem $N+1$ cidades. Ignorando uma cidade A e desconsiderando todas estradas a ela conectadas, obtemos Nova Tumbólia, com N cidades. Por hipótese de indução, o turista consegue fazer seu trajeto passando por todas cidades de Nova Tumbólia B_1, B_2, B_3, $\ldots$, B_n e regressando a B_1 nesta ordem. Analisaremos vários casos:

1. Se todas estradas neste ciclo são rodovias, temos dois casos:
   a) se A conecta-se às cidades de Nova Tumbólia apenas por ferrovias, o caminho B_1, A, B_2, B_3, $\ldots$, B_n, B_1 começa por duas ferrovias e segue por rodovias, logo funciona para Tumbólia original.
   b) se existe j tal que uma rodovia conecta A a B_j, no caminho A, B_j, B_{j+1}, $\ldots$, B_{j-1}, A, onde os índices são tomados módulo n, é necessário trocar de transporte no máximo uma vez, ao ir de B_{j-1} para A.
2. Se o turista necessita trocar de transporte ao passar por B_j, sem perda de generalidade podemos supor que de B_1 até B_j ele percorre rodovias e daí por diante ferrovias. Temos três casos:
   a) Se A é conectada a B_{j-1} por uma rodovia, o caminho $B_1, \ldots, B_{j-1}$, A, B_j, $B_{j+1}, \ldots, B_n$, B_1 funciona para Tumbólia original, trocando de meio só em A ou B_{j+1}.
   b) Se A é conectada a B_{j+1} por uma ferrovia, o caminho $B_1, \ldots, B_j$, A, $B_{j+1}, \ldots, B_n$, B_1, analogamente, funciona para Tumbólia original, trocando de meio só em B_j ou A.
   c) Se A é conectada a B_{j-1} por uma ferrovia e a B_{j+1} por uma rodovia, temos dois casos. Se A é conectada a B_j por rodovia, o turista segue por $B_1, \ldots, B_j$, A, $B_{j+1}, \ldots, B_n$, B_1, trocando de meio de transporte apenas em B_{j+1}. Se for conectada por uma ferrovia, o turista segue por $B_1, \ldots, B_{j-1}$, A, B_j, $B_{j+1}, \ldots, B_n$, B_1, trocando apenas em B_{j-1}. ■

13. Caso base: Se $n = 1$ a afirmação é óbvia.

Passo indutivo: Sejam $n+1$ carros posicionados no circuito como no enunciado do problema. Para cada um deles, considere o trajeto que pode percorrer usando apenas o combustível no seu tanque. Algum destes trajetos tem que alcançar a posição original de algum outro carro, pois se isso não acontece, todos os trajetos seriam disjuntos, implicando que o combustível total não é suficiente para uma volta. Seja então C o primeiro carro cuja posição original é alcançada pelo trajeto do carro B.

Considere outro circuito no qual há n carros, idêntico ao original, exceto que C não existe mais e B tem a soma do combustível de C com o de B na situação original. Pela hipótese, há algum carro A capaz de dar a volta no novo circuito.

Este mesmo carro é capaz de dar a volta no circuito original. O procedimento que ele realiza é o mesmo até chegar ao carro B (o que pode acontecer no primeiro instante, caso $A = B$). Neste instante, tomando todo o combustível de B, ele passa a ter uma quantidade suficiente para ir até C, pelo que foi discutido no primeiro parágrafo. Chegando em C, A toma todo seu combustível, e daí em diante tudo transcorre como no sistema original, pois a soma da quantidade de combustível de C com o de B é igual a quantidade de combustível de B no sistema modificado. ■

14. Mostraremos por indução que a desigualdade vale para cada n natural.

Caso base: Quando $n = 1$, $a_1 = 1$ e a desigualdade é óbvia.

Passo indutivo: Sejam $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ com $a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = 1$. Isto implica que $(n+1)a_{n+1} \leq 1 \implies a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Definindo, para $i = 1, \ldots, n$, $b_i = \frac{a_i}{1-a_{n+1}}$, obtemos $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ e $b_1 + \ldots b_n = 1$. Pela hipótese de indução,

$$b_1^2 + 3b_2^2 + 5b_3^2 + \cdots + (2n-1)b_n^2 \leq 1.$$

Substituindo o valor de b_i, obtemos

$$3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 + (2n+1)a_{n+1}^2 \leq (1-a_{n+1})^2 + (2n+1)a_{n+1}^2,$$

que é menor ou igual a 1 se e somente se $2(n+1)a_{n+1}^2 \leq 2a_{n+1} \iff a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Mas isto já foi provado. ■

15. Caso base: Seja $b = 5$. Quando $k = 1, 2, 3$ tome $n = 4, 2, 1$ respectivamente.

Passo indutivo: Sejam b e n tais que $b^2 = 2^k n + 17$ para $k \geq 3$. Iremos construir b' e n' a partir de b e n de forma que $b'^2 = 2^{k+1}n' + 17$. Se n é par, basta tomar $b' = b$ e $n' = n/2$. Caso contrário, é intuitivo somar algo a b para obter b' e analisar o que acontece com b'^2. Se o que somamos é múltiplo de 2^k, obtemos $(b')^2 \equiv b^2 \mod 2^{k+1}$, o que não funciona. Somos levados então a testar $b' = b + 2^{k-1}$. Neste caso,

$$b'^2 = b^2 + 2 \cdot 2^{k-1}b + 2^{2k-2} = 2^k(n+b) + 2^{(k+1)+k-3} + 17.$$

Porém, como b e n são ímpares, $\frac{b+n}{2}$ é inteiro, donde $b'^2 = 2^{k+1}\left(\frac{b+n}{2} + 2^{k-3}\right) + 17$ e tomando $b' = b^2 + 2^{k-1}$ e $n' = \frac{b+n}{2} + 2^{k-3}$ resolvemos o problema. ■

16. Caso base: É óbvio quando $n = 1$.

Passo indutivo: Em um tabuleiro $(n+1) \times (n+1)$ considere a casinha que contém o menor inteiro. Observe que como os números são todos distintos, existe um número x que é estritamente menor do que todos outros. Suponha que esta casa está na linha a e coluna b. Note que, pela condição do enunciado, para qualquer linha $i \neq a$ o menor número não esta na coluna b . Analogamente, o menor número de qualquer coluna $j \neq b$ não está na linha a. Considere então o tabuleiro $n \times n$ obtido eliminado a linha a e a coluna b. Ele ainda satisfaz a condição do enunciado, pois os menores números de cada linha ou coluna são os mesmos das respectivas linha e coluna do tabuleiro original. Assim, pela hipótese de indução, as n casas marcadas em cada um dos procedimentos são as mesmas. Observe porém que no tabuleiro original marcamos exatamente estas casas, e além disto, na linha a marcamos a casa que tem o x, já que é o menor de todos, e na coluna b também marcamos este número. Assim, as casa marcadas são as mesmas nos dois procedimentos.

17. Caso base: Para $n = 1$, tome o número 5.

Passo indutivo: Seja A um número de n algarismos, todos eles ímpares, tal que $5^n \mid A$. Seja $a = 1, 3, 5, 7$ ou 9. O número $B = 10^n a + A$ tem todos seus algarismos ímpares. Além disso, se $A = 5^n a'$, então $B = 5^n(2^n a + a')$. Basta encontrar a tal que $2^n a + a' \equiv 0 \mod 5$. Note que $a = 1, 3, 5, 7, 9$ cobre todos os resíduos módulo 5. Assim, basta tomar aquele tal que

$$a \equiv -(2^n)^{-1}a' \mod 5,$$

pois 2^n é invertível módulo 5. ■

18. Neste exercício, a dificuldade é encontrar afirmações secundárias que devemos provar por indução para chegar ao resultado. Observe inicialmente que esta sequência é definida pela mesma regra da sequência de Fibonacci, o que podem mudar são seus termos iniciais (que na sequência de Fibonacci são $F_1 = F_2 = 1$). Fazendo alguns casos pequenos, encontramos $a_3 = a_1+a_2$, $a_4 = a_1+2a_2$, $a_5 = 2a_1+3a_2$, $a_6 = 3a_1 + 5a_2$. Somos levados a conjecturar que, para todo $n \geq 3$, $a_n = F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2$. Provemos por indução forte em n.

Caso base: Para $n = 3$ já foi verificado.

Passo indutivo: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, mas pela hipótese de indução, $a_n + a_{n-1} = F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2 + F_{n-3}a_1 + F_{n-2}a_2 = (F_{n-2} + F_{n-3})a_1 + (F_{n-1} + F_{n-2})a_2 = F_{n-1}a_1 + F_n a_2$.

Precisamos encontrar uma maneira de calcular uma soma do tipo $\sum_{i=1}^{k} a_i$. Pela expressão acima, ela é igual a $(1 + \sum_{i=1}^{k-2} F_i)a_1 + (1 + \sum_{i=2}^{k-1} F_i)a_2$. Fazendo alguns casos pequenos, podemos encontrar boas expressões para os somatórios na expressão anterior: $F_1+F_2+F_3 = 4 = F_5-1$, $F_1+F_2+F_3+F_4 = 7 = F_6 - 1$, $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 12 = F_7 - 1$. Provemos por indução que $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$:

Caso base: Para $k = 1$, temos $F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$.

Passo indutivo: Pela hipótese, $F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$.

Voltemos agora ao problema original. Quebramos a soma $\sum_{i=1}^{4n-2} a_i$ em $\sum_{i=1}^{2n} a_i + \sum_{i=2n+1}^{4n-2} a_i$ e definimos $c_i = a_{i+2n}$. Note que $c_{i+2} = c_{i+1} + c_i$. Dessa maneira, aplicando a fórmula que acabamos de encontrar, obtemos

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i = \left(1 + \sum_{i=1}^{2n-2} F_i\right) a_1 + \left(1 + \sum_{i=2}^{2n-1} F_i\right) a_2 = F_{2n}a_1 + (F_{2n+1} - 1)a_2$$

$$\sum_{i=2n+1}^{4n-2} a_i = \sum_{i=1}^{2n-2} c_i = \left(1 + \sum_{i=1}^{2n-4} F_i\right) c_1 + \left(1 + \sum_{i=2}^{2n-3} F_i\right) c_2 = F_{2n-2}c_1 + (F_{2n-1} - 1)c_2.$$

Contudo, $c_1 = a_{2n+1} = F_{2n-1}a_1 + F_{2n}a_2$ e $c_2 = a_{2n+2} = F_{2n}a_1 + F_{2n+1}a_2$. Juntando tudo, obtemos

$$\sum_{i=1}^{4n-2} a_i = (F_{2n}F_{2n-1} + F_{2n-2}F_{2n-1})a_1 + [F_{2n+1} - 1 + F_{2n-2}F_{2n} + (F_{2n-1} - 1)F_{2n+1}]a_2 =$$
$$(F_{2n} + F_{2n-2})F_{2n-1}a_1 + (F_{2n+1}F_{2n-1} - 1 + F_{2n-2}F_{2n})a_2.$$

Como $a_{2n+1} = F_{2n-1}a_1 + F_{2n}a_2$, se mostrarmos que $F_{2n+1}F_{2n-1} - 1 = F_{2n}^2$, concluímos que $b_n = F_{2n} + F_{2n-2}$, logo um inteiro. Mais uma vez, demonstraremos este último fato por indução[2].

Caso base: Para $n = 1$, a equação fica $F_3F_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = F_2^2$, ok!

Passo indutivo: Note que

$$F_{2n+2}^2 - F_{2n}^2 = (F_{2n+2} + F_{2n})(F_{2n+2} - F_{2n}) = (F_{2n+2} + F_{2n})F_{2n+1}.$$

daí, se $F_{2n}^2 = F_{2n-1}F_{2n+1} - 1$, então

$$F_{2n+2}^2 = F_{2n-1}F_{2n+1} - 1 + F_{2n+1}(F_{2n+2} + F_{2n}) = F_{2n+1}(F_{2n+2} + F_{2n} + F_{2n-1}) - 1 =$$
$$F_{2n+1}(F_{2n+2} + F_{2n+1}) - 1 = F_{2n+1}F_{2n+3} - 1$$

Isto conclui a prova.

19. Seja $n^2 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, onde cada α_i é par, e $A(n)$ o número de seus divisores do tipo $4k + 1$ e $B(n)$ o número dos seus divisores do tipo $4k + 3$. Mostraremos, por indução em k, ou seja, no número de fatores primos distintos de n, que n^2 tem mais divisores do tipo $4k + 1$ do que do tipo $4k + 3$, isto é, $A(n) > B(n)$.

Caso base: Quando $n = 1$, existe apenas um divisor e ele é do tipo $4k+1$, logo $A(1) = 1 > 0 = B(1)$.

Passo indutivo: Seja $n^2 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = n'^2 \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$. Pela hipótese, $A(n') > B(n')$. Analisamos três casos:

1. Se $p_{k+1} = 2$, $A(n) = A(n')$ e $B(n) = B(n')$. Segue que $A(n) > B(n)$.

[2]Na verdade, pode-se mostrar um resultado mais geral, que $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Se p_{k+1} é do tipo $4k+1$, todos números p_{k+1}^i, $i = 0, 1, \ldots, \alpha_{k+1}$, são do tipo $4k+1$, logo $A(n) = (\alpha_{k+1}+1)\,A(n')$ e $B(n) = (\alpha_{k+1}+1)\,B(n')$. Segue que $A(n) > B(n)$.

3. Se p_{k+1} é do tipo $4k+3$, p_{k+1}^i é um número do tipo $4k+1$ para $i = 0, 2, 4, \ldots, \alpha_{k+1}$ e do tipo $4k+3$ para $i = 1, 3, \ldots, \alpha_{k+1}-1$. Segue que

$$A(n) = \left(\frac{a_{k+1}}{2}+1\right)A(n') + \frac{a_{k+1}}{2}B(n') \quad \text{e} \quad B(n) = \frac{a_{k+1}}{2}A(n') + \left(\frac{a_{k+1}}{2}+1\right)B(n'),$$

e, pela hipótese, $A(n) - B(n) = A(n') - B(n') > 0$, obtendo $A(n) > B(n)$ como queríamos demonstrar.

20. Arco-íris pode viver no máximo $2n-1$ dias. Provaremos por indução forte em n.

Caso base: Quando $n = 1$, ele não pode viver dois dias, pois no segundo teria que ter a mesma cor do primeiro. O número máximo de dias é $1 = 2\cdot 1 - 1$.

Passo indutivo: Suponha válido para todo $m < n$. Considere uma vida do passarinho na qual ele assumiu n cores ao longo dos seus dias. Seja C sua cor no primeiro dia e $1 = c_1, c_2, \ldots, c_k$ os dias nos quais ele teve esta cor. Afirmamos que se ele teve uma cor $A \neq C$ em algum dia entre os dias c_i e c_{i+1} para algum $i = 1, \ldots, k-1$, ou após o dia c_k, ele não teve esta cor em dias que não estão entre c_i e c_{i+1} ou após o dia c_k respectivamente. Com efeito, se ele tivesse esta cor em algum outro intervalo, existiria uma sequência crescente de dias nos quais ele tem as cores A, C, A, C ou C, A, C, A, mas isto não é possível, por causa da segunda condição do enunciado.

Para cada $i = 1, \ldots, k-1$ seja a_i o números de cores que ele assumiu entre os dias c_i e c_{i+1} e a_k o número de cores que ele toma após o dia c_k. Note que, como ele não toma a mesma cor dois dias consecutivos, $a_i \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$. Assim, pela hipótese de indução, o intervalo entre c_i e c_{i+1} tem no máximo $2a_i - 1$ dias. Se $a_k \geq 1$, ele viveu no máximo $2a_k - 1$ dias após c_k; se $a_k = 0$ ele não viveu após c_k. No primeiro caso, como a cor C apareceu k vezes e $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, pois totalizam todas as n cores que Arco-íris teve, o número máximo de dias que Arco-íris viveu é $k + (2a_1 - 1) + (2a_2 - 1) + \cdots + (2a_k - 1) = 2n - 2$. No segundo caso temos $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = n$, e ele viveu no máximo $k + (2a_1 - 1) + (2a_2 - 1) + \cdots + (2a_{k-1} - 1) = 2n - 1$ dias.

Não é difícil construir um exemplo no qual ele vive $2n-1$ dias. Se $C_1, \ldots, C_n$ são suas cores, basta escolher sucessivamente as cores $C_1, C_2, C_1, C_3, C_1, \ldots, C_1, C_n, C_1$. Isto conclui a prova.

21. Calculando os primeiros termos encontramos

$$x_1 = -2007,\ x_2 = \frac{-2006}{2}x_1 = \frac{2007\cdot 2006}{2},\ x_3 = \frac{-2005}{3}x_2 = -\frac{2007\cdot 2006\cdot 2005}{6}$$

e somos levados a conjecturar que $x_n = (-1)^n\binom{2007}{n}$. Provaremos por indução.

O caso base já está feito, fizemos até mais que o necessário. Supondo que $x_n = (-1)^n\binom{2007}{n}$ vem

$$x_{n+1} = \frac{n+1-2008}{n+1}x_n = \frac{n+1-2008}{n+1}(-1)^n\binom{2007}{n} = (-1)^n\frac{n+1-2008}{n+1}\,\frac{2007!}{n!(2007-n)!} =$$
$$(-1)^n\frac{2007!(-1)(2007-n)}{(n+1)n!(2007-n)!} = (-1)^{n+1}\frac{2007!}{(n+1)!(2007-n-1)!} = (-1)^{n+1}\binom{2007}{n+1}$$

e a indução está provada. Pelo binômio de Newton e o fato que i e $2007 - i$ tem paridades distintas, a soma pedida é

$$S = \sum_{i=0}^{2007} 2^i x_i = \sum_{i=0}^{2007}\binom{2007}{i}\cdot 2^i\cdot(-1)^i = -\sum_{i=0}^{2007}\binom{2007}{i}\cdot 2^i\cdot(-1)^{2007-i} = -(2-1)^{2007} = -1.$$

22. Faremos indução forte no valor da soma $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_n = k$. Quando $k = 1$, os lados da equação tem que ser $x_1 = y_1 = 1$, donde $m = n = mn = 1$. Mas o enunciado pede que a soma seja menor que o produto mn, assim este caso não acontece.

Caso base: Se $k = 2$, como os x_i e y_j são inteiros positivos, temos $m, n \leq 2$. O único valor possível de mn maior que 2 é 4 e ele acontece somente na igualdade $1 + 1 = 1 + 1$. Assim podemos cortar um número 1 de cada lado, resolvendo o problema neste caso.

Passo indutivo: Suponha válido para todas as igualdades possíveis $x_1+\cdots+x_{m'} = y_1+\cdots+y_{n'} = k'$ satisfazendo $2 \leq k' < k$ e $k' \leq m'n'$. Considere uma igualdade $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_n = k$ satisfazendo $k \leq mn$. Algum valor x_a do lado esquerdo é maior ou igual a $\frac{k}{m}$ e algum valor y_b do lado direito é maior ou igual a $\frac{k}{n}$. Sem perda de generalidade considere $x_a \leq y_b$. Se há igualdade, cancelamos estes valores e o problema terminou. Caso contrário, apague x_a e troque y_b por $y'_b = y_b - x_a$. O lado esquerdo tem agora $m - 1$ termos e o direito n. Além disso, a soma agora é menor ou igual a $k - \frac{k}{m} = k\left(1 - \frac{1}{m}\right) \leq mn\left(1 - \frac{1}{m}\right) = (m-1)n$. Pela hipótese, existe alguma maneira de cancelar termos dessa nova equação, de forma a obter uma igualdade. Se este cancelamento não envolve y'_b, ele também vale para a igualdade original. Se envolver, como $y_b = x_a + y'_b$ e x_a não faz parte deste cancelamento, pois x_a foi apagado, cancelamos na igualdade original os mesmos termos, com y_b no lugar de y'_b e cancelamos também x_a, obtendo nova igualdade. Isto conclui a prova.

23. Lembre do

Teorema de Euler. Se a e m são primos entre si, então

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \mod m,$$

onde $\phi(m)$ é igual ao número de inteiros entre 1 e m relativamente primos com m.

O que importa para nós é que $\phi(m) < m$ para todo $m \geq 2$. A sequência $2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ 2^{2^{2^2}},\ \ldots$ é dada por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = 2^{a_n}\ \forall n \geq 1$. Provaremos por indução forte em $m \geq 2$ que ela é eventualmente constante módulo m.

Caso base: Quando $m = 2$ a sequência é congruente a 0 módulo 2.

Passo indutivo: Suponha que a sequência é eventualmente constante módulo k para todo $2 \leq k < m$. Em particular, ela é eventualmente constante módulo $\phi(m)$.

Se m é par[3], então $m = 2^k b$ com $k \geq 1$ e $b < m$ ímpar. Note que a_n é eventualmente congruente a 0 módulo 2^k, pois a partir de certo ponto é formada por potências de 2 maiores. Basta então, pelo Teorema Chinês dos Restos, mostrar que ela é eventualmente constante módulo b. Mas isto vem da hipótese de indução.

Se m é ímpar, pelo Teorema de Euler,

$$a_{n_1} \equiv a_{n_2} \mod \phi(m) \implies 2^{a_{n_1}} \equiv 2^{a_{n_2}} \mod m \iff a_{n_1+1} \equiv a_{n_2+1} \mod m.$$

Como, pela hipótese, ela é eventualmente constante módulo $\phi(m)$, ela é eventualmente constante módulo m. Isto conclui a prova.

24. Começamos calculando valores pequenos de a_k. Note que $a_{a_1} = 3$. Como a_n é estritamente crescente, devemos ter $a_1 < a_2 < a_3$ e logo $a_3 > 3$. Mas isto significa então que $a_1 < 3$, pois caso contrário $a_{a_1} > a_3 > 3$. Assim $a_1 = 1$ ou 2. Contudo, se $a_1 = 1$ teríamos $a_{a_1} = a_1 = 1$, contradição. Segue que

$$a_1 = 2 \text{ e daí } a_2 = 3,\ a_3 = a_{a_2} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ e } a_6 = a_{a_3} = 9.$$

Porém vale que $a_3 < a_4 < a_5 < a_6$, e isto força $a_4 = 7$ e $a_5 = 8$. A regra $a_{a_k} = 3k$ nos permite calcular $a_7 = 12$, $a_8 = 15$, $a_9 = 18$. Podemos começar a notar um padrão, não muito óbvio na sequência,

[3] Observe que neste caso não podemos usar o Teorema de Euler para $a = 2$.

baseado na sua aproximação por potências de 3. Fazendo mais uns casos se necessário, podemos conjecturar que, fixado k inteiro,

$$a_n = 2\cdot 3^k,\ 2\cdot 3^k+1,\ 2\cdot 3^k+2,\ \ldots,\ 2\cdot 3^k+3^k = 3^{k+1} \text{ para } n = 3^k,\ 3^k+1,\ 3^k+2,\ \ldots,\ 2\cdot 3^k$$

respectivamente e

$$a_n = 3^{k+1},\ 3^{k+1}+3,\ 3^{k+1}+2\cdot 3,\ \ldots,\ 3^{k+1}+3^k\cdot 3 = 2\cdot 3^{k+1} \text{ para } n = 2\cdot 3^k,\ 2\cdot 3^k+1,\ 2\cdot 3^k+2,\ \ldots,\ 2\cdot 3^k+3^k = 3^{k+1}$$

respectivamente. A grande dificuldade desta questão é chegar nesta conjectura. Provemos por indução em k

Caso base: Os casos $k = 0$ e $k = 1$ se encontram dentre os casos pequenos que já fizemos.

Passo indutivo: Note que $a_{3^{k+1}} = 2\cdot 3^{k+1}$ pela hipótese de indução. Daí $a_{2\cdot 3^{k+1}} = a_{a_{3^{k+1}}} = 3(3^{k+1}) = 3^{k+2}$. Como

$$2\cdot 3^{k+1} = \underbrace{a_{3^{k+1}} < a_{3^{k+1}+1} < a_{3^{k+1}+2} < \cdots < a_{3^{k+1}+3^{k+1}} = a_{2\cdot 3^{k+1}}}_{3^{k+1}+1 \text{ termos}} = 3^{k+2}$$

e $3^{k+2} - 2\cdot 3^{k+1} = 3^k + 1$, os valores de a_n para $n = 3^{k+1},\ 3^{k+1}+1,\ 3^{k+1}+2,\ \ldots,\ 2\cdot 3^{k+1}$ tem que ser iguais a $2\cdot 3^{k+1},\ 2\cdot 3^{k+1}+1,\ 2\cdot 3^{k+1}+2,\ \ldots,\ 3^{k+2}$ respectivamente. A partir daí, os valores de a_n para $n = 2\cdot 3^{k+1},\ 2\cdot 3^{k+1}+1,\ 2\cdot 3^{k+1}+2,\ \ldots,\ 3^{k+2}$, podem ser calculados pela regra $a_{a_k} = 3k$. Se i é inteiro entre 0 e 3^{k+1}, então $a_{2\cdot 3^k+i} = a_{a_{3^{k+1}+i}} = 3(3^{k+1}+i) = 3^{k+2}+3i$ por causa do que acabamos de demonstrar, concluindo a indução.

Como $100 = 3^4 + 19$, da afirmação acima segue que $a_{100} = 2\cdot 3^4 + 19 = 181$.

Material elaborado por Hugo Fonseca Araújo