Problemas Resolvidos

Nível 2

Invariantes I

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández

Problemas

Problemas

Problema 1. Os números $1, 2, \ldots, 1989$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois números e escrever sua diferença no local. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Esse número pode ser o zero?

Problema 2. Os números $1, 2, \ldots, 20$ são escritos em um quadro negro. Podemos apagar dois deles a e b e escrever no lugar o número $a + b + ab$. Após muitas operações ficamos apenas com um número. Qual deve ser esse número?

Problema 3. (Leningrado 1987) As moedas dos países Dillia e Dallia são o diller e o daller, respectivamente. Podemos trocar um diller por dez dallers e um daller por dez dillers. Zequinha possui um diller e deseja obter a mesma quantidade de dillers e dallers usando essas operações. É possível que isso ocorra?

Problema 4. Seja $d(x)$ a soma dos dígitos de $x \in \mathbb{N}$. Determine todas as soluções da equação $d(d(n)) + d(n) + n = 1997$.

Problema 5. Em um tabuleiro 8×8 uma das casas está pintada de preto e as outras casas estão pintadas de branco. Podemos escolher qualquer linha ou coluna e trocar a cor de todas as suas casas. Usando essas operações, podemos obter um tabuleiro inteiramente preto?

Soluções

1. Note que $1 + 2 + \cdots + 1989 = \frac{1989 \times 1990}{2} = 1989 \times 995$ é ímpar. Vamos observar o que acontece com a soma dos número no quadro ao longo do processo. Ao substituir os números m e n pela diferença $m - n$, a variação na soma dos números do quadro será de $(m - n) - (m + n) = -2n$. Ou seja, sempre teremos uma variação par. Logo a paridade da soma dos número no quadro é um invariante do processo. Como essa soma é inicialmente ímpar, ela então nunca poderá ser igual a zero.

2. Observe primeiramente que $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$. Suponha que no quadro há n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Com a identidade anterior, podemos verificar que o número $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)-1$ é um invariante da operação autorizada. Com isso, se ao concluir a operação ficamos com o número a, deve valer $a = (a + 1) - 1 = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_n + 1) - 1$. Concluímos que o número que teremos ao final do processo é igual a $(1 + 1)(2 + 1)\cdots(20 + 1) - 1 = 21! - 1$.

3. Vamos observar, ao longo das sucessivas trocas de moedas, o que acontece com a diferença entre a quantidade de dillers e dallers que Zequinha possui. Suponha que, em um um certo momento, Zequinha possua m dillers e n dallers, de modo que essa diferença é $m - n$. Ao trocar 1 diller por 10 dallers a diferença passa a ser $(m - 1) - (n + 10) = (m - n) - 11$. Da mesma forma, se a troca for de 1 daller por 10 dillers a diferença passa a ser $(m + 10) - (n - 1) = (m - n) + 11$. Assim percebemos que ao longo do processo, a diferença entre dillers e dallers mantém invariante a congruência módulo 11. Como inicialmente essa diferença é igual a 1, ela nunca poderá ser 0. Portanto, usando essas trocas, Zequinha nunca poderá ter a mesma quantidade de dillers e dallers.

4. O resto na divisão por 9 é um invariante na operação que leva n em $d(n)$. O número 1997 deixa resto 8 na divisão por 9. Portanto devemos ter $3n \equiv 8 \mod 9$, o que implica $3n \equiv 8 \mod 3$, mas isso é impossível. Logo a equação não possui solução.

5. Suponha que uma linha ou coluna do tabuleiro tenha k casas pretas e $8 - k$ casas brancas, onde $k \in \{0, \ldots, 8\}$. Ao inverter as cores, passamos a ter $8 - k$ pretas e k brancas. Logo, a variação no número de casas pretas causada por essa inversão é de $(8 - k) - k = 8 - 2k \in \{-8, -6, \ldots, 0, \ldots, 6, 8\}$ que é par. Disso concluímos que a paridade do número de casas pretas é um invariante do processo. Como temos inicialmente um número ímpar de casas pretas, essa quantidade será sempre ímpar e então nunca poderemos ter 64 casas pretas.

Material elaborado por Susana Frómeta Fernández